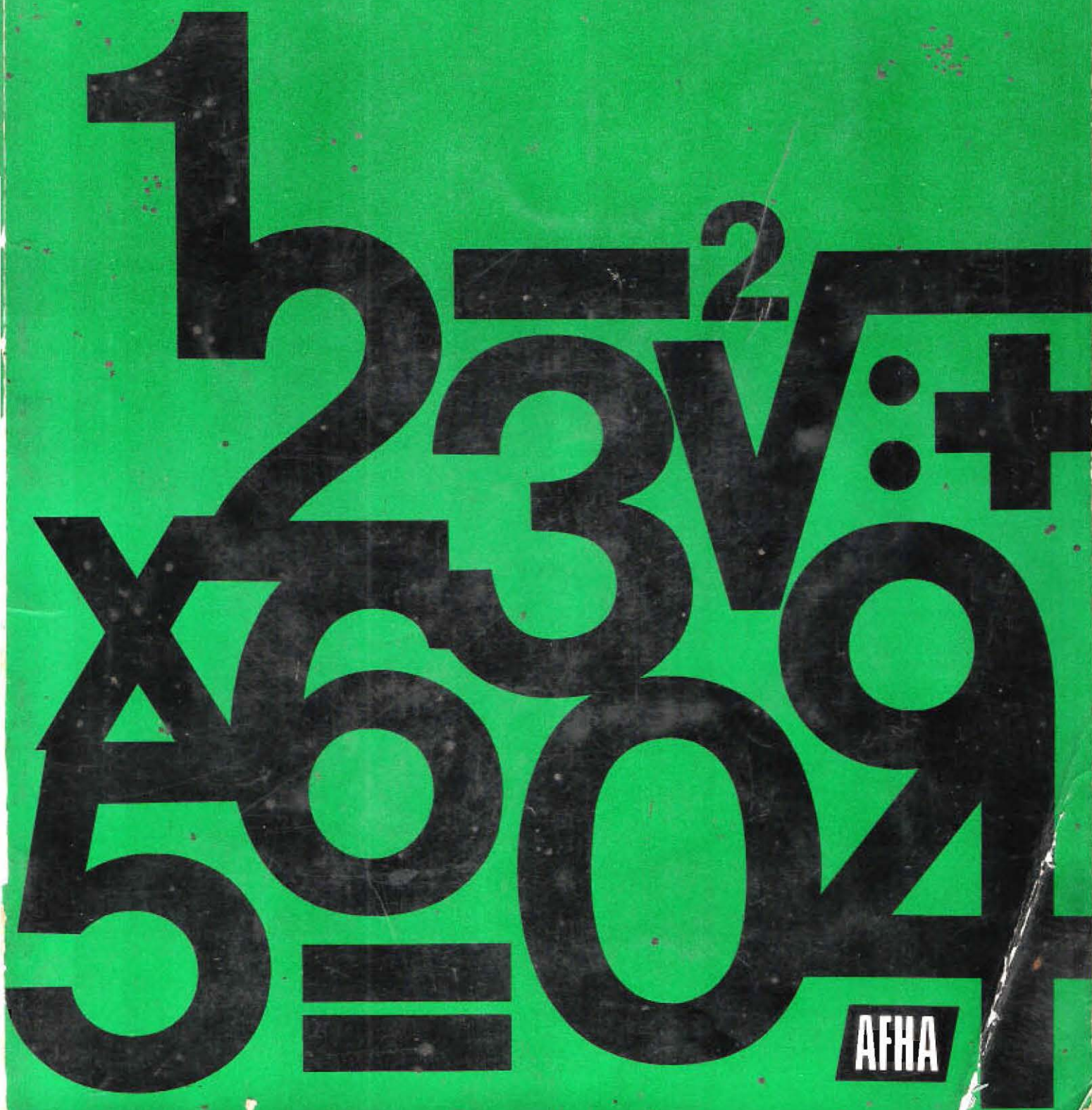


MATEMATICAS



MATEMATICAS

MATEMATICAS

© AFHA Internacional, S.A.
c/. Maestro Nicolau, 4 Barcelona (21)
Decimocuarta edición: Primer trimestre 1980
Depósito Legal: B. 39.331-1979
ISBN 84-201-0351-9
Impreso en España
Printed in Spain
Impreso por EMOGRAPH, S.A.
Almirante Oquendo, 1-9 Barcelona (20)

prólogo

Le presentamos este Tratado de Matemáticas Básicas para Técnicos con la esperanza de que en él encuentre una eficaz ayuda.

El autor de este Tratado ha planteado el programa de estudios partiendo del supuesto de que el alumno domina las cuatro operaciones fundamentales, por lo menos desde un punto de vista práctico. Es decir: se supone que el alumno sabe sumar, restar, multiplicar y dividir a la perfección.

Basándose en esta suposición, el autor toma la aritmética como antesala del álgebra; de tal manera que las cuestiones aritméticas quedan ordenadas y estudiadas en vistas a su futura aplicación dentro de los temas algebraicos, fundamentales en todo estudio técnico.

Por otra parte, este Tratado, como su título indica, se circunscribe a aquellos temas que por su condición de indispensables deben ponerse a la consideración del futuro técnico. El autor trata de proporcionar aquellos conocimientos de aplicación constante que permitan al técnico la interpretación de las fórmulas más en uso y la solución de los cálculos más característicos, pero sin pretender en ningún momento hacer una exposición completa de los temas tratados. Se ha tenido muy en cuenta cuáles son los conocimientos que más pueden ayudar al técnico y que al mismo tiempo representen una base más sólida donde apoyarse en futuras ampliaciones de sus conocimientos matemáticos.

Bajo estos puntos de vista se han elaborado las lecciones que ponemos a su consideración, esperando que su estudio le sirva para enfrentarse con seguridad a las cuestiones teóricas de la especialidad técnica que haya escogido como profesión.

índice

lección 1/página 1

CANTIDAD, UNIDAD Y NUMERO. Cantidad homogénea. Cantidad heterogénea. Operaciones aritméticas. Suma. Resta. Multiplicación. División. División exacta y división inexacta. Potenciación. Suma y resta de potencias. Multiplicación de potencias de igual base. Multiplicación de potencias de igual exponente. Paréntesis. División de potencias de igual base. División de potencias. División de potencias de igual base e igual exponente. Potencias de exponente cero. Radicación. Extracción de la raíz cuadrada de un número. Divisibilidad. Múltiplo. Divisor. Caracteres de divisibilidad.

lección 2/página 17

QUEBRADOS. Lectura de quebrados. Comparación de quebrados. Igualdad de quebrados. Condición esencial de equivalencia. Todo quebrado equivale a una división indicada. Quebrado equivalente a un entero. Expresión de un entero en forma de quebrado. Quebrado equivalente a la unidad. Número mixto. Conversión de un quebrado a mixto y viceversa. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números. Cómo hallar el máximo común divisor de dos números. Mínimo común múltiplo. Simplificación de quebrados. Método práctico. Reducción de quebrados a común denominador. Operaciones con los quebrados. Suma. Resta. Multiplicación. División. Números recíprocos o inversos. División de un entero por un quebrado. División de un quebrado por un entero. División de quebrados de igual denominador. Quebrado de un quebrado. Potenciación de quebrados. Radicación de quebrados.

lección 3/página 37

FRACCIONES DECIMALES. Lectura de números decimales. Transformación de un decimal en fracción ordinaria. Suma de números decimales. Resta. Multiplicación. División. Potenciación de decimales. Radicación. Problemas. Ejemplos.

lección 4/página 53

REGLA DE TRES. Regla de tres simple. Cuando la relación es inversa. Regla de tres compuesta. Tanto por ciento. Números aproximados. Problemas de regla de tres. Soluciones. Problema de tanto por ciento. Solución.

lección 5/página 69

ALGEBRA. Definición. Coeficiente y exponente. Expresión algebraica. Monomio y polinomio. Términos semejantes. Reducción de términos semejantes. Fórmulas. Operaciones con expresiones algebraicas. Suma. Resta. Multiplicación. Monomio por monomio. Polinomio por monomio. Polinomio por polinomio. Casos particulares.

lección 6/página 85

DIVISION ALGEBRAICA. Dividir dos monomios. Dividir un polinomio por un monomio. Dividir dos polinomios. Un ejemplo. Fracciones algebraicas. Simplificación de fracciones algebraicas. Obtención de fracciones con un denominador determinado. Reducción de fracciones. Operaciones con las fracciones algebraicas. Suma. Resta. Multiplicación. División. Fracción de fracción. Potenciación. Potencia de una potencia. Multiplicación y división de potencias. Potencia de una fracción. Un detalle. Potencias de exponente negativo. Radicación. Reglas para la radicación de expresiones algebraicas. Reducción de radicales a un índice común. Suma de radicales. Multiplicación de radicales. División de radicales. Potenciación de radicales. Comentario final.

lección 7/página 109

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS. Igualdad o equivalencia. Identidad. Ecuación. Ecuación literal y ecuación numérica. Clasificación de las ecuaciones. Grado de una ecuación. Resolución de una ecuación. Sistema de ecuaciones. Propiedades de las ecuaciones. Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita. Ecuación de primer grado con dos incógnitas. Método de sustitución. Método de comparación o igualación. Método de reducción o eliminación. Resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

lección 8/página 127

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Ecuaciones completas e incompletas. Fórmula de las ecuaciones de segundo grado. Raíces imaginarias. Casos particulares de la fórmula general. Relaciones entre los coeficientes y las raíces. Resolución de las ecuaciones incompletas. Problemas resueltos de ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas. Problemas resueltos de ecuaciones de segundo grado.

lección 9/página 145

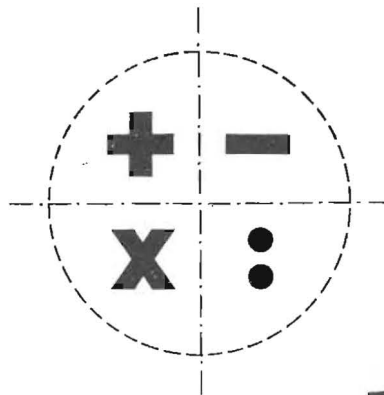
LOGARITMOS. Definición. Logaritmos, ¿por qué? Característica y mantisa. Tablas de logaritmos. Operaciones con logaritmos. Multiplicación. Antilogaritmo. División. Potenciación. Radicación. Algunas operaciones como ejemplo.

lección 10/página 159

VECTORES. Cantidad escalar y cantidad vectorial. Suma de vectores. Sistema de coordenadas. Valor de un vector. Vector paralelo a un eje. Vector no paralelo a los ejes. Operaciones con vectores. Suma de vectores. Resta de vectores. Pendiente de una recta. Coordenadas polares. Representación gráfica de ecuaciones. Ecuaciones de primer grado.

MATEMATICAS

Cantidad
Número
Unidad
Operaciones
Suma
Resta
Multiplicación
División
Potenciación
Radicación
Divisibilidad



LECCION N^o 1

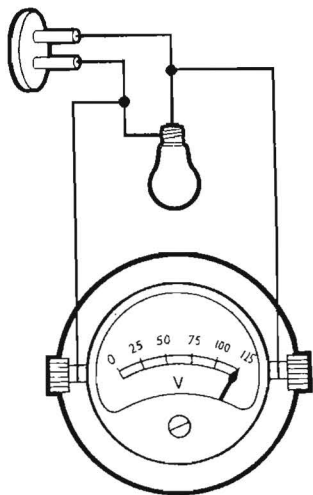


ARITMETICA

Lección primera

Cantidad - Número - Contar - Medir - Unidad - Suma - Resta
Número negativo - Multiplicación - División - División exacta e inexacta
Potenciación - Suma, resta, multiplicación y división de potencias - Radicación - Raíz cuadrada - Suma, resta, multiplicación de raíces - Divisibilidad - Principales características de divisibilidad.

CANTIDAD, UNIDAD Y NUMERO



Para conocer la cantidad de voltaje que pasa por la bombilla, necesitamos medir el número de unidades (voltios).

Para poder decir qué es la Aritmética, deberemos empezar por definir los conceptos de CANTIDAD, NÚMERO, UNIDAD. Aunque usted seguramente ya tiene una noción de lo que significan esos tres nombres, no estará de más que, muy por encima, les demos un repaso.

CON LA PALABRA CANTIDAD EXPRESAMOS LA EXISTENCIA DE COSAS QUE PODEMOS MEDIR O CONTAR. Pero esta expresión es bastante ambigua o —lo que es lo mismo— sólo nos da una idea aproximada de cuántas cosas existen. Así puedo decirle, por ejemplo, que el voltaje necesario para encender las lámparas es considerable. Si usted ignora el voltaje, yo no le habré sacado de dudas, por cuanto por *considerable* puede usted imaginarse mucho o poco, pero sin precisarlo.

¿Cómo determinaremos *cuál* es el voltaje que circula por la lámpara? En primer lugar, deberá tomar una porción de voltaje cualquiera, pero que pueda precisar siempre con exactitud. A esta porción le llamaremos voltio, y nos servirá de UNIDAD, o patrón, para establecer *cuántos* voltios tiene la tensión en estudio. Esta unidad es la que se ha tomado como base para efectuar la medida del voltaje, que nos da 125 voltios.

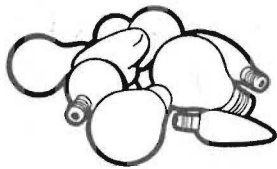
Es decir: el voltio-unidad, está contenido 125 veces en la tensión que medía. Ahora ya tiene precisada ésta: 125 voltios. Tanto usted como yo sabemos con *exactitud* la *cantidad* de voltaje que circula por los conductores que van a la lámpara. Y para expresar esa cantidad, nos hemos valido del NÚMERO.

LA CANTIDAD EXPRESA LA EXISTENCIA DE COSAS QUE PUEDEN MEDIRSE O CONTARSE.

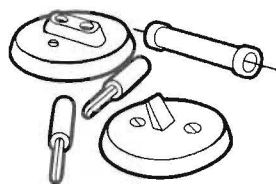
EL NÚMERO ES EL RESULTADO DE MEDIR O CONTAR UNA CANTIDAD.

LA UNIDAD ES LA CANTIDAD QUE SE TOMA COMO BASE PARA LA MEDICIÓN.

ARITMÉTICA ES LA RAMA DE LAS MATEMÁTICAS QUE ESTUDIA LOS NÚMEROS Y LAS RELACIONES QUE EXISTEN ENTRE ELLOS. TRATAREMOS, POR TANTO, EN ESTAS LECCIONES DE ARITMÉTICA DE LAS MÁS ELEMENTALES DE LAS CITADAS RELACIONES.



En este montón hay nueve bombillas. Son nueve unidades de la misma especie (bombillas) y por ello decimos que es una cantidad homogénea.



Esta es una cantidad heterogénea: 1 enchufe, 1 resistencia, 1 interruptor y 2 bananas.

Sumandos		Suma
$4 + 2$	$=$	6

CANTIDAD HOMOGÉNEA

Tanto las cantidades como los números pueden referirse a elementos de la misma especie (por ejemplo: lámparas), o a elementos de distinta especie (por ejemplo: lámparas y enchufes). En el primer caso, si cuenta usted las lámparas que tiene en su casa, se referirá siempre a éstas: una lámpara en el comedor, otra en el dormitorio, otra en el pasillo, etc. Las tres cantidades expresadas son HOMOGÉNEAS, por cuanto las tres se refieren a cosas iguales, o que tienen el mismo cometido.

CANTIDAD HOMOGÉNEA ES LA QUE EXPRESA UNIDADES DE LA MISMA ESPECIE.

CANTIDAD HETEROGÉNEA

Pero si en lugar de contar sólo las lámparas incluye algún otro elemento —una lámpara, un interruptor y un enchufe en el comedor; otra lámpara y dos enchufes en la cocina; una lámpara y dos interruptores en el pasillo, etc.—, las cantidades ya no son homogéneas, por cuanto la lámpara y el enchufe no tienen nada en común, ni el enchufe y los interruptores. Son tres elementos distintos entre sí, y por tanto las cantidades también serán distintas entre sí. Entonces se les denomina HETEROGÉNEAS.

CANTIDADES HETEROGÉNEAS SON LAS QUE EXPRESAN UNIDADES DE DISTINTA ESPECIE.

OPERACIONES ARITMÉTICAS

SUMA

Con las cantidades anteriores podemos efectuar una serie de operaciones, muy usadas en la vida cotidiana. Si usted desea indicar cuántas lámparas hay en su casa, no irá diciendo: una en tal sitio; otra allí; etc., sino que expresará el total de las mismas: seis lámparas. ¿Cómo lo habrá efectuado? Sencillamente, sumando las unidades de cada una de las cantidades. A éstas se les denomina SUMANDOS; al número obtenido (el seis en este caso) SUMA o TOTAL, y a la operación SUMAR. El signo que indica esta operación es una cruz antepuesta a cada uno de los sumandos (+).

Tenemos ya definida una de las operaciones aritméticas:

SUMAR ES FORMAR UN NUEVO NÚMERO CON LAS UNIDADES DE OTROS VARIOS.

RESTA

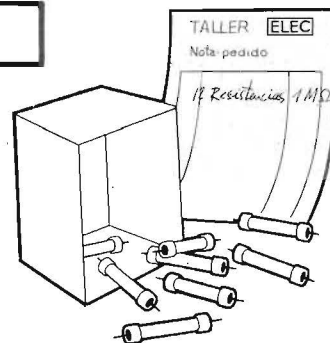
Supongamos ahora que se funde una de las cinco bombillas que tiene cada lámpara. Naturalmente, esta bombilla es inservible, y prácticamente es como si no la tuviera. ¿Cómo expresará que de las cinco sólo quedan cuatro? Se valdrá para ello de la RESTA, que consiste en quitar unidades a un número determinado. Así, si quitamos una unidad al número cinco, quedarán cuatro. Observe que la resta es la operación inversa de la suma, ya que mientras en ésta añadíamos unidades, en la resta las quitamos.

El número al que deben restársele unidades se denomina MINUENDO. El que indica las unidades que deben restarse, SUSTRAENDO; y el resultado de esta resta recibe el nombre de RESTO o DIFERENCIA. El signo de la operación es un guión, antepuesto al sustraendo (—).

Minuendo		Sustraendo	
$5 - 1$	$=$	4	
			Resto

RESTAR ES FORMAR UN TERCER NÚMERO QUITANDO UNIDADES A OTRO.

Puede ocurrirle un caso extraordinario al efectuar una resta. Suponga por un momento, que usted y yo convenimos en que le remitiré una docena de resistencias de determinado tipo. Al efectuar el paquete, me encuentro que en existencia sólo tengo ocho resistencias. Me faltan cuatro para cubrir el pedido. ¿Cómo indicaré la circunstancia de que aún le debo cuatro? Aritméticamente, lo haré de esta forma: $8 - 12 = -4$, o sea, cuatro unidades que deben restarse aún (se lee «menos cuatro»). Esas cuatro resistencias representan para mí una cantidad **NEGATIVA**, porque, al debérselas a usted, es como si yo no las tuviera. En cuanto reciba más resistencias de la fábrica, esas cuatro volarán hacia usted. Así, suponiendo que llegarán 100, sólo 96 quedarían en existencia para futuros pedidos. De ahí que los números precedidos del guión (—) se denominan **NÚMEROS NEGATIVOS**.



Para servir el pedido faltan 4 resistencias. Habrá una deuda de cuatro unidades que, expresada aritméticamente, será un número negativo: -4 .

MULTIPLICACION

Hasta aquí hemos citado las dos operaciones elementales de la Aritmética. Todas las demás operaciones se basan en ellas. Claro que, como suponemos que sumar y restar no tiene secretos para usted, no hemos querido profundizar en leyes ni propiedades.

Veamos ahora, también a *grosso modo*, algunos casos particulares de la suma y la resta, de los que deducimos nuevas operaciones.

Volvamos al ejemplo de las lámparas de su casa. Hemos convenido en que cada lámpara tenía cinco bombillas y que en total había seis lámparas. ¿Cuántas bombillas hay, en conjunto, en su casa? Si cada lámpara tiene cinco, bastará con sumar seis veces cinco bombillas:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 \text{ bombillas}$$

Hemos supuesto un caso sencillo. Pero si en lugar de 6 lámparas hubiera, por ejemplo, 52, ¿no cree que sería un poco largo, anotar cinco hasta un número de 52? Para evitar esta faena tan engorrosa, recurriremos a la **multiplicación**, que no es otra cosa que una suma abreviada de varios sumandos iguales. Así, 6 veces cinco bombillas, serán 30 bombillas. O bien, 52 veces 5 bombillas nos darán 260 bombillas.

$$6 \text{ veces } 5 = 30 \text{ bombillas}$$

$$52 \text{ veces } 5 = 260 \text{ bombillas}$$

$$8 - 12 = -4$$

Minuendo

Sustraendo

Resto

UNA MULTIPLICACIÓN ES UNA SUMA ABREVIADA DE VARIOS SUMANDOS IGUALES.

El sumando que se repite recibe el nombre de **MULTIPlicANDO**. El que indica las veces que el multiplicando se repite, **MULTIPlicADOR**, y el resultado, **PRODUCTO**. Tanto el multiplicando como el multiplicador son **FACTORES** de la multiplicación. Y el signo que indica esta operación es una cruz (\times), o bien un punto (\cdot), que se leen «por» (o multiplicado por).

$$6 \times 5 = \overbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}^{\text{Seis veces cinco unidades}} = 30$$

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Observe que tanto si indica 6 veces 5, como 5 veces 6, el producto sigue siendo el mismo. Esta propiedad se expresa de la siguiente forma:

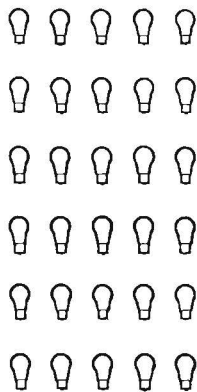
EL ORDEN DE LOS FACTORES NO ALTERA EL PRODUCTO.

$$5 \times 6 = 30 \quad 6 \times 5 = 30$$

Hemos visto la forma de abreviar una suma de varios sumandos iguales. Pero ¿y si en lugar de una suma, fuera una resta, con varios sustraendos iguales, la que quisiéramos abreviar? Nos bastará con multiplicar el sustraendo por el *número* de sustraendos *iguales*, y el producto así obtenido sería el sustraendo total que debería restar. Si distribuimos las 30 bombillas en grupos de 5 (para cada lámpara), quedarán sueltas:

$$30 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0 \text{ bombillas}$$

o sea, ninguna. Todas estarán colocadas en las lámparas.



30 bombillas distribuidas por grupos de cinco, nos permiten formar 6 grupos. Decimos que $30 : 5 = 6$

DIVISION

Del ejemplo anterior, podemos deducir otra operación.

Suponga que los datos que posee son las 30 bombillas, y que tiene que distribuirlas en grupos de 5. ¿Cuántos grupos podrá formar?

Hemos podido formar 6 grupos. Para hallar este resultado nos ha bastado ir restando sucesivamente 5 bombillas de las 30 que poseíamos. ¿No cree usted que esto es también bastante engorroso, sobre todo si las cantidades son grandes? ¿No hay manera de abreviarlo? ¡Sí! Podemos encontrar cuántos grupos se pueden formar con una cierta cantidad, sin necesidad de recurrir a tantas restas. Bastará para ello que acudamos a la **DIVISIÓN**. Esta operación indica cuántas veces podemos restar una cierta cantidad de otra. O dicho de otra forma:

DIVIDIR ES HALLAR LAS VECES QUE UN NÚMERO ES CONTENIDO POR OTRO.

La cantidad de la que debe restarse la otra se denomina **DIVIDENDO**. La que debe restarse, **DIVISOR**, y la que indica las veces que puede restarse, **COCIENTE**. Los signos de dividir son los dos puntos (:) o bien un ángulo recto \perp , y se leen «dividido por».

Signos de la división



Al repartir 27 bombillas en grupos de cinco obtenemos una división **inexacta**.

DIVISION EXACTA Y DIVISION INEXACTA

En toda división pueden ocurrir dos casos. Que al formar los grupos no sobre ninguna cantidad, o que sí sobre. Así, en el supuesto anterior, al efectuar el reparto de las 30 bombillas en grupos de 5, formábamos 6 grupos exactos, sin que sobrara ninguna. A esta división se le llama **DIVISIÓN EXACTA**. Pero si en lugar de las 30 bombillas hubiera sólo 27, por ejemplo, sólo lograríamos formar 5 grupos enteros, y aún nos quedarían 2 bombillas, insuficientes para formar otro grupo. En este caso, la división sería **DIVISIÓN INEXACTA**, y la cantidad que sobra es el *resto* de la división.

Hemos estudiado las cuatro operaciones «fundamentales»: suma, resta, multiplicación y división. Ha repasado conceptos elementales, pero que era necesario recordar, a fin de evitarnos posteriores dudas. Antes de seguir adelante, le aconsejo relea de nuevo las explicaciones anteriores, hasta fijar por completo conceptos y nombres. Le será de mucha utilidad.

POTENCIACION

Sigamos con las operaciones aritméticas. Nos toca ahora exponer la *potenciación*. ¿Qué expresamos con el verbo potenciar? Al igual que ocurría con la suma, podemos hallarnos en el caso de una multiplicación de varios factores iguales. Supongamos que sea ésta:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4.096.$$

Los factores iguales son seis (como podrían ser sesenta o más), y el hecho de anotar *todos* los factores representa un buen trabajo. Para abreviarlo, indicaremos que el factor cuatro se repite seis veces, de esta forma: 4^6 , o sea, cuatro a la sexta potencia: $4^6 = 4.096$. De lo expuesto anteriormente, deducimos que:

Exponente
Potencia
 $4^6 = 4.096$
Base

POTENCIAR ES MULTIPLICAR UN NÚMERO POR SÍ MISMO TANTAS VECES COMO INDIQUE OTRO NÚMERO.

El factor que se repite es la BASE. El número que indica las veces que se repite, el EXPONENTE. Finalmente, el resultado o producto obtenido, es la POTENCIA.

SUMA Y RESTA DE POTENCIAS

¿Y cómo se opera con potencias? Será mejor que presentemos algunos ejemplos, en los que entren cada una de las cuatro operaciones fundamentales. PARA SUMAR O RESTAR NÚMEROS POTENCIADOS, NO HAY MÁS REMEDIO QUE HALLAR LA POTENCIA Y LUEGO RESTARLAS O SUMARLAS. Así:

$$\begin{aligned} 2^3 + 3^2 &= 8 + 9 = 17 \\ 3^3 + 3^3 &= 27 + 27 = 54 \\ 2^4 - 3^2 &= 16 - 9 = 7 \end{aligned}$$

A la potencia 2 se le denomina cuadrado; al 3, cubo. La expresión 5^2 , se lee cinco al cuadrado; 5^3 , cinco al cubo. 5^6 , cinco a la sexta potencia, etcétera.

MULTIPLICACION DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

En cambio, tanto en la multiplicación como en la división, pueden darse algunos casos particulares. Por ejemplo, SI SE TRATA DE MULTIPLICAR POTENCIAS DE IGUAL BASE, BASTARÁ SUMAR LOS EXPONENTES. La suma que den será el *nuevo exponente del número*. Sean:

$$5^4 \times 5^3 = 5^{4+3} = 5^7$$

o sea, el producto de 5^4 por 5^3 , es idéntico al que nos daría elevando el cinco a la séptima potencia. Observe que la base es siempre la misma.

MULTIPLICACION DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Si en lugar de la base fuera el exponente el que se mantuviera igual —o, dicho de otra forma, si tiene que multiplicar potencias de *distinta base*, pero elevadas todas ellas al *mismo exponente*—, BASTARÁ CON MULTIPLICAR LAS BASES, Y ELEVAR EL PRODUCTO A DICHO EXPONENTE. Vea un ejemplo:

$$9^2 \times 6^2 \times 3^2 = (9 \times 6 \times 3)^2 = 162^2$$

$$6^2 \times 6^7 = 6^9$$

Para multiplicar potencias de igual base, basta elevar dicha base a un exponente igual a la suma de los exponentes.

$$8^5 \times 3^5 = 24^5$$

Para multiplicar potencias de igual exponente, basta multiplicar las bases y elevar el producto al exponente que se repite.

$$7^4 : 7^2 = 7^2$$

Para dividir potencias de igual base, basta elevar dicha base a un exponente igual a la diferencia de los exponentes.

$$1^1 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$3^1 = 3$$

$$725^1 = 725$$

$$n^1 = n$$

Cualquier número elevado al exponente 1, es igual a sí mismo.

$$1^0 = 1$$

$$2^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

$$451^0 = 1$$

$$n^0 = 1$$

Todo número elevado al exponente cero, es igual a la unidad.

PARENTESIS

En la expresión anterior puede apreciar que se ha usado, por primera vez, el signo llamado PARÉNTESIS (). Con él se indica que todas las operaciones que encierra expresan UN SOLO número. Así $(5 + 3)$ expresa el número 8. Más adelante se indicará la forma de «suprimir» un paréntesis. De momento consideramos que lo mejor es efectuar las operaciones que encierra.

DIVISION DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Volvamos a las potencias, tras este breve «paréntesis». Ya ha visto lo que ocurre cuando, al multiplicar potencias, son iguales las bases o los exponentes. Suponga que lo que intenta es dividir potencias. Si éstas tienen igual BASE, efectuaremos la operación inversa que en la multiplicación; RESTAREMOS LOS EXPONENTES. De esta forma:

$$6^4 : 6^3 = 6^{4-3} = 6^1 = 6$$

¡Otra observación importante! La potencia de grado 1 de cualquier número, es el mismo número. ¡Y es lógico que así sea! Si el exponente indica las veces que debe multiplicarse por sí mismo un número, con el exponente 1, sólo es una vez la que debe repetirse:

$$6^1 = 6$$

$$\text{así como } 6^2 = 6 \times 6 \text{ (dos veces)}$$

Por lo tanto, puede decir, sin temor a equivocarse, que cualquier número está elevado a la potencia 1, ya que:

$$1^1 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 3^1 = 3 \text{ etc.}$$

DIVISION DE POTENCIAS

Bien. El segundo caso en el que puede encontrarse, dividiendo potencias, es el de potencias de *igual exponente*. BASTARÁ DIVIDIR LAS DOS BASES Y ELEVAR EL COCIENTE AL EXPONENTE CITADO. Es el caso inverso al de la multiplicación:

$$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$$

También puede efectuar la operación a la inversa, o sea:

$$(6 : 3)^2 = 6^2 : 3^2$$

DIVISION DE POTENCIAS DE IGUAL BASE E IGUAL EXPONENTE

Y aquí tenemos el tercer caso: que bases y exponentes sean iguales entre sí. Es bastante difícil que se vea precisado a recurrir a él. Pero por si acaso, vea mediante un ejemplo lo que ocurre:

$$5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

CUALQUIER NÚMERO ELEVADO AL EXPONENTE CERO ES IGUAL A UNO.

POTENCIAS DE EXPONENTE CERO

¡La potencia cero de cualquier número da siempre la unidad! Esta circunstancia se explica fácilmente, si observa que el cociente de dividir dos números iguales $(5 : 5 = 1)$ es 1. Y como por otra parte, la resta de los exponentes nos da 0, debe convenir conmigo en que es lógico que ocurra lo que anteriormente le hemos expuesto: que la potencia de grado cero de cualquier número es igual a la unidad.

RADICACION

Con este último caso hemos terminado la parte dedicada a la potenciación. Pero, como todas las operaciones, la potenciación también tiene su inversa. Si con la primera buscábamos el producto de una multiplicación de varios factores iguales, ha de existir otra operación en la que, conociendo el producto de esos factores, así como las veces que hemos multiplicado el mismo factor, podamos hallar este factor. Por lo tanto, si en la potenciación efectuábamos varias multiplicaciones, aquí deberemos «dividir» también varias veces (puesto que la división es la inversa de la multiplicación). Esta operación se llama *radicación*.



RADICAR ES HALLAR UN NÚMERO LLAMADO RAÍZ QUE, MULTIPLICADO POR SÍ MISMO TANTAS VECES COMO INDICA EL ÍNDICE, DÉ POR RESULTADO EL RADICANDO.

El signo de esta operación es $\sqrt{\quad}$. Observe usted ahora un mismo número potenciado y radicando:

$$10^2 = 100 \quad \sqrt{100} = 10, \text{ porque, } (10 \times 10 = 100)$$

La cifra que en la potenciación se denomina *exponente*, en la radicación se convierte en *ÍNDICE*. Aquí nos indica el *grado de la raíz* y se coloca sobre el ángulo en forma de V del signo.

La cantidad que en la potenciación servía de *base*, en la radicación se transforma en *RAÍZ* y es el dato que buscamos.

Finalmente, la *potencia* es aquí el *RADICANDO* que se escribe debajo del brazo horizontal del signo.

La principal aplicación de la radicación, o la más práctica, es hallar la *raíz cuadrada* de cualquier número. Se entiende por raíz cuadrada cuando el índice es 2. Si por índice se coloca el 3, es raíz cúbica; con el 4 tenemos la raíz cuarta o de cuarto grado, etc. No obstante, repito: la única que por ahora puede interesarle, es la extracción de la raíz cuadrada.

$$\sqrt[3]{27}$$

La raíz de tercer grado o cúbica (índice tres) de 27, será un número que elevado a la tercera potencia nos dé 27.

Este número es el 3, puesto que...

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

El índice 2 no se indica. Así $\sqrt{9}$ se leerá *raíz cuadrada de 9*. Los demás índices sí se indican: $\sqrt[3]{\quad}$ raíz cúbica; $\sqrt[4]{\quad}$ raíz cuarta etcétera.

EXTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO

$$\sqrt{85.849}$$

Efectuaremos la explicación sobre un ejemplo.

Vamos a extraer, la raíz cuadrada del número 85849.

$$\sqrt{8.58.49}$$

Empezaremos por separar las cifras del número, en grupos de a dos, a partir de la derecha.

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Esta igualdad la veremos así:

La raíz cúbica de 27 es igual al número 3.

$\begin{array}{r} \sqrt{8.58.49} \\ -4 \\ \hline 45.8 \end{array}$	2
	$2^2 = 4$

Ahora busque un número que multiplicado por sí mismo (elevado al cuadrado) dé 8, o bien se aproxime... El núm. $2^2 = 4$, y como $3^2 = 9$, ya es demasiado grande, tomaremos el 2, que colocaremos como primera cifra de la raíz. El producto 4, lo restaremos del 8.

El segundo grupo que encontramos, partiendo de la izquierda, se coloca detrás del resto anterior. Del número así formado (458) separamos la última cifra (45.8).

$\begin{array}{r} \sqrt{8.58.49} \\ -4 \\ \hline 45.8 \end{array}$	2
	$2^2 = 4$
	45:4

Y ahora, observe con atención. Del grupo anterior, tome las primeras cifras (45) y colóquelas, como le indico, en la zona de operaciones.

Dicho número debe dividirse por el DOBLE del número que tenga ya en la raíz. Como sólo tenemos el 2, el doble de 2 es 4.

$\begin{array}{r} \sqrt{8.58.49} \\ -4 \\ \hline 45.8 \end{array}$	2
	$2^2 = 4$
	$45:4=11$
	$45:4=9$
	49

El cociente de dividir 45 por 4 es 11; pero para nuestros fines el cociente máximo que se admite es el 9, o sea, que un cociente de dos cifras no sirve. Por tanto, debemos aceptar que $45 : 4 = 9$. Ya tenemos la segunda cifra de la raíz.

Para conocer si efectivamente el cociente hallado corresponde a la segunda cifra de la raíz, formaremos un solo número con el divisor y el cociente (4 y 9), así: 49.

$\begin{array}{r} \sqrt{8.58.49} \\ -4 \\ \hline 45.8 \\ -441 \\ \hline 0174.9 \end{array}$	29
	$2^2 = 4$
	$45:4=11$
	$45:4=9$
	$49 \times 9 = 441$

Multiplicaremos dicho número por el cociente hallado (el 9 en este caso), con lo que tendremos el producto 441. Este producto deberá ser siempre menor o igual que el grupo formado con las cifras del radicando (458). Como esta condición se cumple, el 9 es efecti-

vamente la segunda cifra de la raíz. Si el grupo formado con las cifras del radicando hubiera sido, por ejemplo, 407 (en lugar de 458), el producto anterior (441) sería mayor que dicho grupo, y por tanto el 9 no nos serviría. Deberíamos tomar entonces el número inmediatamente inferior, que sería el 8. Y repitiendo el proceso: $48 \times 8 = 384$. Este producto sí sería menor que 407, y por tanto, la cifra válida sería el 8. ¿De acuerdo?

Sigamos con el caso que resolvemos. El cociente 9 se coloca tras el 2 que ya teníamos en el lugar destinado a las cifras de la raíz. Y el producto 441 se sitúa debajo del grupo 458, a fin de restarlo de éste.

Y repitiendo el proceso anterior, formaremos un nuevo grupo con el resto anterior (17) y las cifras que aún quedan del radicando (49), siendo 1749 el nuevo número. Separaremos la última cifra (9), y el número 174 se sitúa en la zona de operaciones.

El doble de 29 es 58 ($29 \times 2 = 58$), y el cociente de dividir 174 por 58 es $174 : 58 = 3$.

Comprobaremos si este cociente es válido formando el grupo 583 y multiplicándolo por 3 ; $583 \times 3 = 1749$.

Como el producto obtenido es igual al grupo formado con las cifras del radicando (1749), el cociente 3 corresponde a la tercera y última de las cifras de la raíz buscada. Comprobado esto, sólo nos resta colocar el 3 detrás de las dos que ya teníamos, 293. Si deseamos conocer también qué resto queda, o sea, la diferencia existente entre el cuadrado de la raíz hallada (293) y el número que teníamos como radicando (85.849), bastará con restar el último producto obtenido (1749) del último grupo formado con las cifras del radicando (1749). En este caso no queda ningún resto, puesto que $1749 - 1749 = 0$, lo que indica que $293^2 = 85.849$. Si la última diferencia no es igual a 0, diremos que la raíz es inexacta.

$ \begin{array}{r} \sqrt{8.58.49} \\ \underline{-4} \\ 45.8 \\ \underline{-441} \\ 174.9 \\ \underline{-1749} \\ 0000 \end{array} $	$ \begin{array}{l} 29 \\ \hline 2^2 = 4 \\ \hline \cancel{45 \cdot 4 = 11} \\ 45 : 4 = 9 \\ \hline 49 \times 9 = 441 \\ \hline 174 : 58 = 3 \\ \hline 583 \times 3 = 1749 \end{array} $
---	--

Puede ocurrir que quede una cifra en el primer grupo de la izquierda, como en el caso anterior, o dos cifras. En ambos casos se sigue el mismo procedimiento.

La raíz cuadrada que hemos expuesto es sencilla. Sólo constaba de tres grupos y además era exacta (no quedaba ningún resto). No obstante, todas son iguales en cuanto a la resolución; pero, claro, con más o menos operaciones, según los grupos que se pueden formar. Cuando en la raíz entran decimales hay una

ligera variación. En la lección 3.^a, que tratará de los decimales, le explicaré en qué consiste. Por ahora practique con raíces enteras sin decimales.

Seguramente se preguntará por qué no expongo también cómo se halla una raíz de grado mayor. En primer lugar, es complicadísimo; y en segundo lugar, no deberá usarlo nunca, por lo que considero que no es necesario llenarle la cabeza de números para algo que luego no debe utilizar.

DIVISIBILIDAD - MÚLTIPLO - DIVISOR

Terminaremos la lección con un nuevo tema: aplicación de la división exacta en la simplificación de las operaciones, que se conoce por **DIVISIBILIDAD**. Pero primero definamos qué es un múltiplo y un divisor. Al tratar de la división exacta, vio usted que se conocía por tal a la división que no deja ningún resto, y por tanto el divisor estaba contenido un número exacto de veces en el dividendo. Cuando esto ocurre, podemos llamar *múltiplo* al dividendo, porque *contiene exactamente* al divisor. De no tenerlo exactamente, de existir un resto, los dos números serían *primos* entre sí. Recíprocamente, **DIVISOR** de un número es el que le divide exactamente. Por ejemplo:

8 es múltiplo de 2, porque $8 : 2 = 4$ y no hay resto
y 2 es divisor de 8, porque $8 : 2 = 4$, sin resto.

Como $4 \times 2 = 8$, deducimos que el producto de una multiplicación es **MÚLTIPLO** de los factores. Efectivamente, si divide el producto por uno de los factores, el cociente será el otro factor.

$$12 \times 4 = 48 \quad 48 : 12 = 4 \quad 48 : 4 = 12$$

¿Qué aplicación tiene la divisibilidad? Como la divisibilidad es la aplicación práctica de las propiedades de la división exacta, nos servirá para determinar caracteres o reglas para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Los principales caracteres, los que más importancia tienen, son los de los once primeros números de la serie natural. Mediante ellos, podremos conocer inmediatamente si un número es divisible por 2, por 3, por 4, etc. Ahí van:

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

DIVISIBLE POR 2

PARA SER DIVISIBLE POR 2, EL NÚMERO DEBE TERMINAR EN 0 O EN CIFRA PAR: 2, 4, 6, 8.

$$564 : 2 = 282$$

$$120 : 2 = 60$$

DIVISIBLE POR 3

POR 3, CUANDO SUMANDO EL VALOR DE CADA CIFRA DA MÚLTIPLO DE 3.

$$4278; 4 + 2 + 7 + 8 = 21$$

$2 + 1 = 3$, por lo tanto es divisible por 3

$$4278 : 3 = 1426$$

DIVISIBLE POR 4

POR 4, CUANDO LAS DOS ÚLTIMAS CIFRAS SON CEROS (00), O ES UN MÚLTIPLO DE 4.

$$35764 \quad 64 : 4 = 16, \text{ luego es divisible por 4.}$$

$$35764 : 4 = 8941$$

DIVISIBLE POR 5

POR 5, CUANDO TERMINA EN 0 O EN 5.

$$225 : 5 = 45$$

$$1110 : 5 = 222$$

DIVISIBLE POR 6

POR 6, CUANDO ES DIVISIBLE, A LA VEZ, POR 2 Y POR 3.

Como 4.278 era divisible por 3, y también lo es por 2, (termina en cifra par), ha de serlo por 6.

$$4.278 : 6 = 713$$

DIVISIBLE POR 8

POR 8, CUANDO TERMINA EN TRES CEROS (000) O LAS TRES ÚLTIMAS CIFRAS FORMAN UN MÚLTIPLO DE 8.

$$27.208, \text{ Como } 208 : 8 = 26 \text{ es divisible por 8}$$

$$27.208 : 8 = 3.401$$

DIVISIBLE POR 9

POR 9, CUANDO LA SUMA DE LOS VALORES DE SUS CIFRAS DA 9 O MÚLTIPLO DE 9.

$$8.343 \quad 8 + 3 + 4 + 3 = 18$$

$1 + 8 = 9$ luego es divisible por 9

$$8.343 : 9 = 927$$

DIVISIBLE POR 11

UN NÚMERO ES DIVISIBLE POR 11 CUANDO EL RESTO O DIFERENCIA ENTRE LAS CIFRAS PAR Y LAS CIFRAS DE LUGAR IMPAR ES MÚLTIPLO DE 11 ó 0.

El número 231, es múltiplo de 11, por cuanto $2 + 1 = 3$, y $3 - 3 = 0$.

También el número 2.607 es divisible por 11, ya que sumando las cifras de lugar par $6 + 7 = 13$, y restándoles las de lugar impar $2 + 0 = 2$, $13 - 2 = 11$, nos da 11.

$$231 : 11 = 21$$

$$2.607 : 11 = 237$$

Tabla de cuadrados y raíces cuadradas de los 1.000 primeros números

N.º	Cuadrado	√	N.º	Cuadrado	√	N.º	Cuadrado	√	N.º	Cuadrado	√	N.º	Cuadrado	√
1	1	1,000	51	2601	7,141	101	10201	10,050	151	22801	12,288	201	40401	14,177
2	4	1,414	52	2704	7,211	102	10404	10,099	152	23104	12,329	202	40804	14,213
3	9	1,732	53	2809	7,280	103	10609	10,149	153	23409	12,369	203	41209	14,248
4	16	2,000	54	2916	7,348	104	10816	10,198	154	23716	12,410	204	41616	14,283
5	25	2,236	55	3025	7,416	105	11025	10,247	155	24025	12,450	205	42025	14,318
6	36	2,449	56	3136	7,483	106	11236	10,296	156	24336	12,490	206	42436	14,353
7	49	2,646	57	3249	7,550	107	11449	10,344	157	24649	12,530	207	42849	14,387
8	64	2,828	58	3364	7,616	108	11664	10,392	158	24964	12,570	208	43264	14,422
9	81	3,000	59	3481	7,681	109	11881	10,440	159	25281	12,609	209	43681	14,457
10	100	3,162	60	3600	7,746	110	12100	10,488	160	25600	12,649	210	44100	14,491
11	121	3,317	61	3721	7,810	111	12321	10,536	161	25921	12,689	211	44521	14,526
12	144	3,464	62	3844	7,874	112	12544	10,583	162	26244	12,728	212	44944	14,560
13	169	3,606	63	3969	7,937	113	12769	10,630	163	26569	12,767	213	45369	14,594
14	196	3,742	64	4096	8,000	114	12996	10,677	164	26896	12,806	214	45796	14,629
15	225	3,873	65	4225	8,062	115	13225	10,724	165	27225	12,845	215	46225	14,663
16	256	4,000	66	4356	8,124	116	13456	10,770	166	27556	12,884	216	46656	14,697
17	289	4,123	67	4489	8,185	117	13689	10,817	167	27889	12,923	217	47089	14,731
18	324	4,243	68	4624	8,246	118	13924	10,863	168	28224	12,961	218	47524	14,765
19	361	4,359	69	4761	8,307	119	14161	10,909	169	28561	13,000	219	47961	14,799
20	400	4,472	70	4900	8,366	120	14400	10,954	170	28900	13,038	220	48400	14,832
21	441	4,583	71	5041	8,426	121	14641	11,000	171	29241	13,077	221	48841	14,866
22	484	4,690	72	5184	8,485	122	14884	11,045	172	29584	13,115	222	49284	14,900
23	529	4,796	73	5329	8,544	123	15129	11,090	173	29929	13,153	223	49729	14,933
24	576	4,899	74	5476	8,602	124	15376	11,135	174	30276	13,191	224	50176	14,967
25	625	5,000	75	5625	8,660	125	15625	11,180	175	30625	13,229	225	50625	15,000
26	676	5,099	76	5776	8,718	126	15876	11,225	176	30976	13,266	226	51076	15,033
27	729	5,196	77	5929	8,775	127	16129	11,269	177	31329	13,304	227	51529	15,066
28	784	5,291	78	6084	8,832	128	16384	11,314	178	31684	13,342	228	51984	15,100
29	841	5,385	79	6241	8,888	129	16641	11,358	179	32041	13,379	229	52441	15,133
30	900	5,477	80	6400	8,944	130	16900	11,402	180	32400	13,416	230	52900	15,166
31	961	5,568	81	6561	9,000	131	17161	11,445	181	32761	13,454	231	53361	15,199
32	1024	5,657	82	6724	9,055	132	17424	11,489	182	33124	13,491	232	53824	15,231
33	1089	5,745	83	6889	9,110	133	17689	11,533	183	33489	13,528	233	54289	15,264
34	1156	5,831	84	7056	9,165	134	17956	11,576	184	33856	13,565	234	54756	15,297
35	1225	5,916	85	7225	9,219	135	18225	11,619	185	34225	13,601	235	55225	15,330
36	1296	6,000	86	7396	9,274	136	18496	11,662	186	34596	13,638	236	55696	15,362
37	1369	6,083	87	7569	9,327	137	18769	11,705	187	34969	13,675	237	56169	15,395
38	1444	6,164	88	7744	9,381	138	19044	11,747	188	35344	13,711	238	56644	15,427
39	1521	6,245	89	7921	9,434	139	19321	11,790	189	35721	13,748	239	57121	15,460
40	1600	6,325	90	8100	9,487	140	19600	11,832	190	36100	13,784	240	57600	15,492
41	1681	6,403	91	8281	9,539	141	19881	11,874	191	36481	13,820	241	58081	15,524
42	1764	6,481	92	8464	9,592	142	20164	11,916	192	36864	13,856	242	58564	15,556
43	1849	6,557	93	8649	9,644	143	20449	11,958	193	37249	13,892	243	59049	15,588
44	1936	6,633	94	8836	9,695	144	20736	12,000	194	37636	13,928	244	59536	15,620
45	2025	6,708	95	9025	9,747	145	21025	12,042	195	38025	13,964	245	60025	15,652
46	2116	6,782	96	9216	9,798	146	21316	12,083	196	38416	14,000	246	60516	15,684
47	2209	6,856	97	9409	9,849	147	21609	12,124	197	38809	14,036	247	61009	15,716
48	2304	6,928	98	9604	9,899	148	21904	12,165	198	39204	14,071	248	61504	15,748
49	2401	7,000	99	9801	9,950	149	22201	12,207	199	39601	14,107	249	62001	15,780
50	2500	7,071	100	10000	10,000	150	22500	12,247	200	40000	14,142	250	62500	15,811

Terminamos con la primera lección dando una tabla con los cuadrados y raíces cuadradas de los mil primeros números.

Cuando precise conocer el cuadrado o la raíz cuadrada de un número entero comprendido entre el 1 y el 1.000 esta tabla le dará directamente el resultado.

**TABLA
DEL 1 AL 250**

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD OMITIDOS

Habr  observado que se ha omitido el número 7. La divisibilidad por 7, o sea, la forma de saber si un número es divisible por 7 o no, es engorrosa; resulta más fácil y práctico efectuar la división. También he omitido la divisibilidad por 10, ya que supongo que ésta se la sabr  al dedillo. Con que el número termine en ceros, es suficiente para que sea divisible por 10.

Todos los anteriores caracteres de divisibilidad tienen mucha aplicación en los quebrados (de los que trataremos en la próxima lección), por lo que también le recomiendo que los repase hasta grab rseles en la memoria.

**TABLA
DEL 251 AL 500**

N.�	Cuadrado	V	N.�	Cuadrado	V	N.�	Cuadrado	V	N.�	Cuadrado	V	N.�	Cuadrado	V
251	63001	15,843	301	90601	17,349	351	123201	18,735	401	160801	20,025	451	203401	21,237
252	63504	15,874	302	91204	17,378	352	123904	18,762	402	161604	20,050	452	204304	21,260
253	64009	15,906	303	91809	17,407	353	124609	18,788	403	162409	20,075	453	205209	21,284
254	64516	15,937	304	92416	17,437	354	125316	18,815	404	163216	20,100	454	206116	21,307
255	65025	15,969	305	93025	17,464	355	126025	18,841	405	164025	20,125	455	207025	21,331
256	65536	16,000	306	93636	17,493	356	126736	18,868	406	164836	20,149	456	207936	21,354
257	66049	16,031	307	94249	17,521	357	127449	18,894	407	165649	20,174	457	208849	21,378
258	66564	16,062	308	94864	17,550	358	128164	18,921	408	166464	20,199	458	209764	21,401
259	67081	16,093	309	95481	17,578	359	128881	18,947	409	167281	20,224	459	210681	21,424
260	67600	16,124	310	96100	17,607	360	129600	18,974	410	168100	20,248	460	211600	21,448
261	68121	16,155	311	96721	17,635	361	130321	19,000	411	168921	20,273	461	212521	21,471
262	68644	16,186	312	97344	17,663	362	131044	19,026	412	169744	20,298	462	213444	21,494
263	69169	16,217	313	97969	17,692	363	131769	19,053	413	170569	20,322	463	214369	21,517
264	69696	16,248	314	98596	17,720	364	132496	19,079	414	171396	20,347	464	215296	21,541
265	70225	16,279	315	99225	17,748	365	133225	19,105	415	172225	20,371	465	216225	21,564
266	70756	16,309	316	99856	17,777	366	133956	19,131	416	173056	20,396	466	217156	21,587
267	71289	16,340	317	100489	17,804	367	134689	19,157	417	173889	20,421	467	218089	21,610
268	71824	16,370	318	101124	17,833	368	135424	19,183	418	174724	20,445	468	219024	21,633
269	72361	16,401	319	101761	17,861	369	136161	19,209	419	175561	20,469	469	219961	21,656
270	72900	16,432	320	102400	17,888	370	136900	19,235	420	176400	20,494	470	220900	21,679
271	73441	16,462	321	103041	17,916	371	137641	19,261	421	177241	20,518	471	221841	21,702
272	73984	16,492	322	103684	17,944	372	138384	19,287	422	178084	20,543	472	222784	21,726
273	74529	16,523	323	104329	17,972	373	139129	19,313	423	178929	20,567	473	223729	21,749
274	75076	16,553	324	104976	18,000	374	139876	19,339	424	179776	20,591	474	224676	21,771
275	75625	16,583	325	105625	18,028	375	140625	19,365	425	180625	20,615	475	225625	21,794
276	76176	16,613	326	106276	18,055	376	141376	19,391	426	181476	20,640	476	226576	21,817
277	76729	16,643	327	106929	18,083	377	142129	19,416	427	182329	20,664	477	227529	21,840
278	77284	16,673	328	107584	18,111	378	142884	19,442	428	183184	20,689	478	228484	21,863
279	77841	16,703	329	108241	18,138	379	143641	19,468	429	184041	20,712	479	229441	21,886
280	78400	16,733	330	108900	18,166	380	144400	19,494	430	184900	20,736	480	230400	21,909
281	78961	16,763	331	109561	18,193	381	145161	19,519	431	185761	20,760	481	231361	21,932
282	79524	16,793	332	110224	18,221	382	145924	19,545	432	186624	20,785	482	232324	21,954
283	80089	16,823	333	110889	18,248	383	146689	19,570	433	187489	20,809	483	233289	21,977
284	80656	16,852	334	111556	18,276	384	147456	19,596	434	188356	20,833	484	234256	22,000
285	81225	16,882	335	112225	18,303	385	148225	19,621	435	189225	20,857	485	235225	22,023
286	81796	16,911	336	112896	18,330	386	148996	19,647	436	190096	20,881	486	236196	22,045
287	82369	16,941	337	113569	18,357	387	149769	19,672	437	190969	20,904	487	237169	22,068
288	82944	16,971	338	114244	18,385	388	150541	19,698	438	191844	20,928	488	238144	22,091
289	83521	17,000	339	114921	18,412	389	151321	19,723	439	192721	20,952	489	239121	22,113
290	84100	17,029	340	115600	18,439	390	152100	19,748	440	193600	20,976	490	240100	22,136
291	84681	17,059	341	116281	18,466	391	152881	19,774	441	194481	21,000	491	241081	22,158
292	85264	17,088	342	116964	18,493	392	153664	19,799	442	195364	21,024	492	242064	22,181
293	85849	17,117	343	117649	18,520	393	154449	19,824	443	196249	21,048	493	243049	22,204
294	86436	17,146	344	118336	18,547	394	155236	19,849	444	197136	21,071	494	244036	22,226
295	87025	17,176	345	119025	18,574	395	156025	19,875	445	198025	21,095	495	245025	22,249
296	87616	17,205	346	119716	18,601	396	156816	19,900	446	198916	21,118	496	246016	22,271
297	88209	17,234	347	120409	18,628	397	157609	19,925	447	199809	21,142	497	247009	22,293
298	88804	17,263	348	121104	18,655	398	158404	19,950	448	200704	21,166	498	248004	22,316
299	89401	17,292	349	121801	18,681	399	159201	19,975	449	201601	21,189	499	249001	22,338
300	90000	17,320	350	122500	18,708	400	160000	20,000	450	202500	21,213	500	250000	22,361

N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V
501	251001	22,383	551	303601	23,473	601	361201	24,515	651	423801	25,515	701	491401	26,476
502	252004	22,405	552	304704	23,495	602	362404	24,536	652	425104	25,534	702	492804	26,495
503	253009	22,428	553	305809	23,516	603	363609	24,556	653	426409	25,554	703	494209	26,514
504	254016	22,450	554	306916	23,537	604	364816	24,576	654	427716	25,573	704	495616	26,533
505	255025	22,472	555	308025	23,558	605	366025	24,597	655	429025	25,593	705	497025	26,552
506	256036	22,494	556	309136	23,580	606	367236	24,617	656	430336	25,612	706	498436	26,571
507	257049	22,517	557	310249	23,601	607	368449	24,637	657	431649	25,632	707	499849	26,589
508	258064	22,539	558	311364	23,622	608	369664	24,658	658	432964	25,651	708	501264	26,608
509	259081	22,561	559	312481	23,643	609	370881	24,678	659	434281	25,671	709	502681	26,627
510	260100	22,583	560	313600	23,664	610	372100	24,698	660	435600	25,690	710	504100	26,646
511	261121	22,605	561	314721	23,685	611	373321	24,718	661	436921	25,710	711	505521	26,665
512	262144	22,627	562	315844	23,706	612	374544	24,739	662	438244	25,729	712	506944	26,683
513	263169	22,649	563	316969	23,728	613	375769	24,759	663	439569	25,749	713	508369	26,702
514	264196	22,672	564	318096	23,749	614	376996	24,779	664	440896	25,768	714	509796	26,721
515	265225	22,694	565	319225	23,770	615	378225	24,799	665	442225	25,788	715	511225	26,739
516	266256	22,716	566	320356	23,791	616	379456	24,819	666	443556	25,807	716	512656	26,758
517	267289	22,738	567	321489	23,812	617	380689	24,839	667	444889	25,826	717	514089	26,777
518	268324	22,760	568	322624	23,833	618	381924	24,860	668	446224	25,846	718	515524	26,795
519	269361	22,782	569	323761	23,854	619	383161	24,880	669	447561	25,865	719	516961	26,814
520	270400	22,803	570	324900	23,875	620	384400	24,900	670	448900	25,884	720	518400	26,833
521	271441	22,825	571	326041	23,896	621	385641	24,920	671	450241	25,904	721	519841	26,851
522	272484	22,847	572	327184	23,916	622	386884	24,940	672	451584	25,923	722	521284	26,870
523	273529	22,869	573	328329	23,937	623	388129	24,960	673	452929	25,942	723	522729	26,889
524	274576	22,891	574	329476	23,958	624	389376	24,980	674	454276	25,961	724	524176	26,907
525	275625	22,913	575	330625	23,979	625	390625	25,000	675	455625	25,981	725	525625	26,926
526	276676	22,935	576	331776	24,000	626	391876	25,020	676	456976	26,000	726	527076	26,944
527	277729	22,956	577	332929	24,021	627	393129	25,040	677	458329	26,019	727	528529	26,963
528	278784	22,978	578	334084	24,042	628	394384	25,060	678	459684	26,038	728	529984	26,981
529	279841	23,000	579	335241	24,062	629	395641	25,080	679	461041	26,058	729	531441	27,000
530	280900	23,022	580	336400	24,083	630	396900	25,100	680	462400	26,077	730	532900	27,018
531	281961	23,043	581	337561	24,104	631	398161	25,120	681	463761	26,096	731	534361	27,037
532	283024	23,065	582	338724	24,125	632	399424	25,140	682	465124	26,115	732	535824	27,055
533	284089	23,087	583	339889	24,145	633	400689	25,159	683	466489	26,134	733	537289	27,074
534	285156	23,108	584	341056	24,166	634	401956	25,179	684	467856	26,153	734	538756	27,092
535	286225	23,130	585	342225	24,187	635	403225	25,199	685	469225	26,172	735	540225	27,111
536	287296	23,152	586	343396	24,207	636	404496	25,219	686	470596	26,192	736	541696	27,129
537	288369	23,173	587	344569	24,228	637	405769	25,239	687	471969	26,211	737	543169	27,148
538	289444	23,195	588	345744	24,249	638	407044	25,259	688	473344	26,230	738	544644	27,166
539	290521	23,216	589	346921	24,269	639	408321	25,278	689	474721	26,249	739	546121	27,185
540	291600	23,238	590	348100	24,290	640	409600	25,298	690	476100	26,268	740	547600	27,203
541	292681	23,259	591	349281	24,310	641	410881	25,318	691	477481	26,287	741	549081	27,221
542	293764	23,281	592	350464	24,331	642	412164	25,338	692	478864	26,306	742	550564	27,240
543	294849	23,302	593	351649	24,352	643	413449	25,357	693	480249	26,325	743	552049	27,258
544	295936	23,324	594	352836	24,372	644	414736	25,377	694	481636	26,344	744	553536	27,276
545	297025	23,345	595	354025	24,393	645	416025	25,397	695	483025	26,363	745	555025	27,295
546	298116	23,367	596	355216	24,413	646	417316	25,416	696	484416	26,382	746	556516	27,313
547	299209	23,388	597	356409	24,434	647	418609	25,436	697	485809	26,401	747	558009	27,331
548	300304	23,409	598	357604	24,454	648	419904	25,456	698	487204	26,420	748	559504	27,350
549	301401	23,431	599	358801	24,474	649	421201	25,475	699	488601	26,439	749	561001	27,368
550	302500	23,452	600	360000	24,495	650	422500	25,495	700	490000	26,457	750	562500	27,386

**TABLA
DEL 501 AL 750**

N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V	N.º	Cuadrado	V
751	564001	27,404	801	641601	28,302	851	724201	29,172	901	811801	30,017	951	904401	30,838
752	565504	27,423	802	643204	28,320	852	725904	29,189	902	813604	30,033	952	906304	30,854
753	567009	27,441	803	644809	28,337	853	727609	29,206	903	815409	30,050	953	908209	30,871
754	568516	27,459	804	646416	28,355	854	729316	28,223	904	817216	30,067	954	910116	30,887
755	570025	27,477	805	648025	28,372	855	731025	29,240	905	819025	30,083	955	912025	30,903
756	571536	27,495	806	649636	28,390	856	732736	29,257	906	820836	30,100	956	913936	30,919
757	573049	27,514	807	651249	28,408	857	734449	29,275	907	822649	30,116	957	915849	30,935
758	574564	27,532	808	652864	28,425	858	736164	29,292	908	824464	30,133	958	917764	30,952
759	576081	27,550	809	654481	28,443	859	737881	29,309	909	826281	30,150	959	919681	30,968
760	577600	27,568	810	656100	28,460	860	739600	29,326	910	828100	30,166	960	921600	30,984
761	579121	27,586	811	657721	28,478	861	741321	29,343	911	829921	30,183	961	923521	31,000
762	580644	27,604	812	659344	28,496	862	743044	29,360	912	831744	30,199	962	925444	31,016

**TABLA
DEL 751 AL 1.000**

763	582169	27,622	813	660969	28,513	863	744769	29,377	913	833569	30,216	963	927369	31,032
764	583696	27,640	814	662596	28,531	864	746496	29,394	914	835396	30,232	964	929296	31,048
765	585225	27,659	815	664225	28,548	865	748225	29,411	915	837225	30,249	965	931225	31,064
766	586756	27,677	816	665856	28,566	866	749956	29,428	916	839056	30,265	966	933156	31,080
767	588289	27,695	817	667489	28,583	867	751689	29,445	917	840889	30,282	967	935089	31,097
768	589824	27,713	818	669124	28,601	868	753424	29,462	918	842724	30,298	968	937024	31,113
769	591361	27,731	819	670761	28,618	869	755161	29,479	919	844561	30,315	969	938961	31,129
770	592900	27,749	820	672400	28,636	870	756900	29,496	920	846400	30,331	970	940900	31,145
771	594441	27,767	821	674041	28,653	871	758641	29,513	921	848241	30,348	971	942841	31,161
772	595984	27,785	822	675684	28,670	872	760384	29,530	922	850084	30,364	972	944784	31,177
773	597529	27,803	823	677329	28,688	873	762129	29,547	923	851928	30,381	973	946729	31,193
774	599076	27,821	824	678976	28,705	874	763876	29,563	924	853776	30,397	974	948676	31,209
775	600625	27,839	825	680625	28,723	875	765625	29,580	925	855625	30,414	975	950625	31,225
776	602176	27,857	826	682276	28,740	876	767376	29,597	926	857476	30,430	976	952576	31,241
777	603729	27,875	827	683929	28,758	877	769129	29,614	927	859329	30,447	977	954529	31,257
778	605284	27,893	828	685584	28,775	878	770884	29,631	928	861184	30,463	978	956484	31,273
779	606841	27,911	829	687241	28,792	879	772641	29,648	929	863041	30,479	979	958441	31,289
780	608400	27,929	830	688900	28,810	880	774400	29,665	930	864900	30,496	980	960400	31,305
781	609961	27,946	831	690561	28,827	881	776161	29,682	931	866761	30,512	981	962361	31,321
782	611524	27,964	832	692224	28,844	882	777924	29,698	932	868624	30,529	982	964324	31,337
783	613089	27,982	833	693889	28,862	883	779689	29,715	933	870489	30,545	983	966289	31,353
784	614656	28,000	834	695556	28,879	884	781456	29,732	934	872356	30,561	984	968256	31,369
785	616225	28,018	835	697225	28,896	885	783225	29,749	935	874225	30,578	985	970225	31,385
786	617796	28,036	836	698896	28,914	886	784996	29,766	936	876096	30,594	986	972196	31,401
787	619369	28,053	837	700569	28,931	887	786769	29,782	937	877969	30,610	987	974169	31,417
788	620944	28,071	838	702244	28,948	888	788544	29,799	938	879844	30,627	988	976144	31,432
789	622521	28,089	839	703921	28,965	889	790321	29,816	939	881721	30,643	989	978121	31,448
790	624100	28,107	840	705600	28,983	890	792100	29,833	940	883600	30,659	990	980100	31,464
791	625681	28,125	841	707281	29,000	891	793881	29,850	941	885481	30,676	991	982081	31,480
792	627264	28,142	842	708964	29,017	892	795664	29,866	942	887364	30,692	992	984064	31,496
793	628849	28,160	843	701649	29,034	893	797449	29,883	943	889249	30,708	993	986049	31,512
794	630436	28,178	844	712336	29,052	894	799236	29,900	944	891136	30,725	994	988036	31,528
795	632025	28,196	845	714025	29,069	895	801025	29,917	945	893025	30,741	995	990025	31,544
796	633616	28,213	846	715716	29,086	896	802816	29,933	946	894916	30,757	996	992016	31,559
797	635209	28,231	847	717409	29,103	897	804609	29,950	947	896809	30,773	997	994009	31,575
798	636804	28,249	848	719104	29,120	898	806404	29,967	948	898704	30,790	998	996004	31,591
799	638401	28,267	849	720801	29,138	899	808201	29,983	949	900601	30,806	999	998001	31,607
800	640000	28,284	850	722500	29,155	900	810000	30,000	950	902500	30,822	1000	1000000	31,624

**TABLA (final)
DEL 751 AL 1.000**

MATEMATICAS

Quebrados

Lectura

Comparación de quebrados

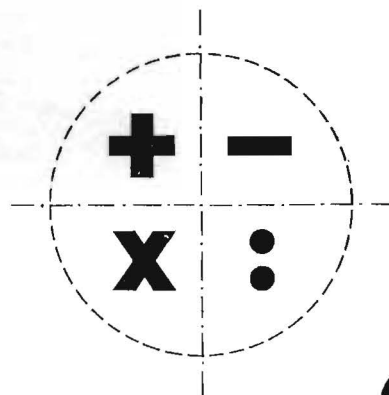
Números mixtos

Simplificación de quebrados

Máximo común divisor

y mínimo común múltiplo

Operaciones con quebrados



LECCION N^o 2

ARITMETICA

Lección segunda

Quebrados - Lectura de quebrados - Comparación de quebrados
Igualdad de quebrados - Condición esencial de equivalencia - Quebrado y división indicada - Quebrado equivalente a un entero - Expresión de un entero en forma de quebrado - Quebrado equivalente a la unidad
Número mixto - Conversión de un quebrado a mixto y de un mixto a quebrado - Simplificación de quebrados - Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números - Reducción de quebrados a un común denominador - Operaciones con quebrados: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de quebrados.

QUEBRADO

LLAMAMOS QUEBRADO AL NÚMERO QUE INDICA PARTES ENTERAS DE UN TODO O DE UNA UNIDAD.

Nos encontramos muchas veces en la necesidad de expresar y operar con cantidades no enteras, para lo que nos valemos de los números quebrados.

Supongamos que para cierta instalación necesitamos tres trozos de hilo de igual longitud y que debemos cortar estos trozos de un rollo que contiene hilo suficiente para conseguir no tres, sino cinco trozos del tamaño que deseamos.

Es decir: podemos dividir en cinco partes iguales todo el hilo disponible, de las cuales sólo consideramos tres a efectos de la operación a realizar.

¿Cómo expresamos que se ha dividido un *todo* (digamos unidad) en cinco partes y que sólo operamos con tres de estas partes?

Lo expresaremos así: $\frac{3}{5}$

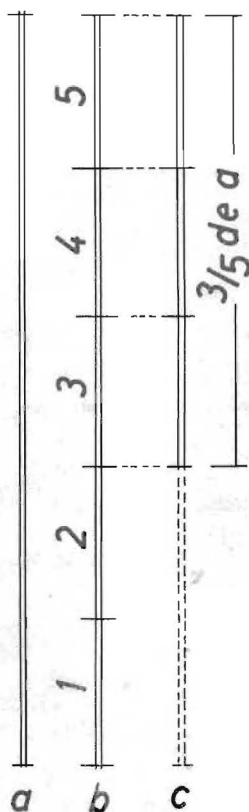
Observe que se trata de dos números separados por un trazo horizontal y que el número inferior (el 5) indica las partes en que hemos dividido el todo considerado, mientras que el número superior (el 3) nos dice cuántas de estas partes tomamos en consideración.

El número inferior recibe el nombre de DENOMINADOR.

El número superior recibe el nombre de NUMERADOR.

LECTURA DE QUEBRADOS

Para leer cualquier quebrado se cita primero el numerador y luego el denominador. El primero no presenta dificultad alguna, puesto que basta decir el nombre del número: uno, dos, tres, cuatro, etc. Pero para los denominadores debe tenerse en cuenta lo siguiente.



El hilo a es la totalidad del hilo. Si este todo lo dividimos en 5 partes iguales (b) y de estas partes tomamos 3 (c) diremos que tenemos $\frac{3}{5}$ de a.

1.º Si el denominador es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10 se lee *mediós* (o mitades), *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos* y *décimos* o *décimas*. Por ejemplo:

$$\frac{5}{16} < 1$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Este gráfico representa en su parte rayada los $\frac{5}{16}$ del cuadrado.

Es un quebrado < 1

$$\frac{18}{16} > 1$$

1	2	3	4	1
5	6	7	8	5
9	10	11	12	9
13	14	15	16	13

Este gráfico representa un quebrado mayor que la unidad. Son $\frac{18}{16}$ puesto que hemos tomado 2 partes de otro cuadrado.

$$\frac{16}{16} = 1$$

Tenemos la totalidad del cuadrado

$$\frac{7}{9} \text{ se lee SIETE NOVENOS.}$$

$$\frac{16}{3} \text{ se lee DIECISÉIS TERCIOS.}$$

$$\frac{3}{10} \text{ se lee TRES DÉCIMAS.}$$

2.º Si el denominador es superior a 10, se lee el número normalmente y se le añade la terminación *avos*. Por ejemplo:

$$\frac{23}{42} \text{ se lee veintitrés, cuarenta y dos-avos.}$$

$$\frac{8}{11} \text{ ocho, once-avos.}$$

$$\frac{345}{874} \text{ trescientos cuarenta y cinco, ochocientos setenta y cuatro-avos.}$$

3.º Los quebrados cuyo denominador es 10, 100, 1000, etc., se denominan decimales, y se lee *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, etc. Trataremos en la próxima lección de esta clase de quebrados.

COMPARACION DE QUEBRADOS

Todo número quebrado puede ser mayor, igual o menor que la unidad. Para reconocer cuál de las tres cualidades corresponde a un determinado quebrado, bastará con fijarse en los dos términos del mismo.

Si el numerador es *menor* que el denominador, el quebrado es también *menor* que la unidad.

Si ambos términos, numerador y denominador, son *iguales*, el quebrado es *igual* a la unidad.

Finalmente, si el numerador es *mayor* que el denominador, el quebrado es *mayor* que la unidad.

Las comparaciones anteriores tienen fácil explicación. Como el denominador es el término que indica las partes en que se divide la unidad, y el numerador el término que indica las partes que se toman de esta división, se deduce que si el numerador es menor que el denominador indica que tomamos menos partes de las que hemos formado al dividir la unidad.

Así, $\frac{3}{5}$ es menor que la unidad, puesto que sólo utilizábamos tres

de las cinco partes en que dividíamos el cable, y nos quedaban dos trozos de cable sin usar.

Si en lugar de tres fueran cinco las partes que colocamos en la instalación, la expresión de tal circunstancia, en forma de quebrado, se-

ría $\frac{5}{5}$. Ambos términos son iguales, lo que indica que hemos usado

todas las partes en que se dividió el cable. Podemos afirmar que el quebrado es igual a la unidad.

Finalmente, si en vez de una instalación necesitásemos efectuar dos, con tres trozos de cable cada una, serían 6 los trozos de cable a emplear. Ahora bien: de un cable sólo podríamos obtener 5 partes, insuficientes para las dos instalaciones. Necesitaremos otro cable, idéntico al anterior, que también dividiremos en 5 partes, de las que tomaremos la que nos falta para completar las dos instalaciones. En forma de que-

brado, diremos que necesitábamos $\frac{6}{5}$ de cable, expresión que será ma-

yor que la unidad, puesto que hemos empleado *un cable entero y un trozo de otro*.

Como ve, no ofrece ninguna dificultad reconocer si un quebrado es mayor, igual o menor que la unidad; sus dos términos lo indican al primer golpe de vista.

Lo que no es tan fácil de reconocer a simple vista es la igualdad o desigualdad de dos quebrados entre sí. Naturalmente, si dos quebrados tienen los mismos numeradores y denominadores será evidente que ambos son iguales. Pero veamos qué ocurre cuando uno de los dos términos o los dos a la vez son distintos.

IGUALDAD DE QUEBRADOS

Antes, empero, expliquemos que el signo $>$ significa MAYOR QUE, e indica que la cantidad de la izquierda es mayor que la situada a la derecha del signo. Invirtiendo la situación del vértice, $<$ significa MENOR QUE, e indica lo contrario: la cantidad de la izquierda es más pequeña que la de la derecha. Recuerde siempre que la cantidad situada donde está el vértice del ángulo es la menor.

Bien. SUPONIENDO DOS QUEBRADOS DE IGUAL DENOMINADOR, ES MAYOR EL QUE TIENE MAYOR NUMERADOR.

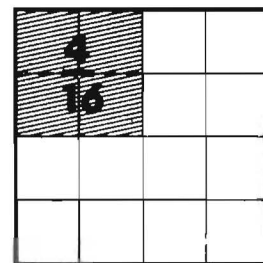
$$\frac{35}{64} > \frac{23}{64}$$

A igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador.

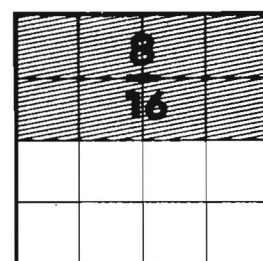
$$\frac{18}{22} > \frac{18}{57}$$

Cuando numeradores y denominadores son distintos, ES MAYOR EL QUEBRADO CUYO NUMERADOR, MULTIPLICADO POR EL DENOMINADOR DEL OTRO, DA UN PRODUCTO MAYOR.

$$\frac{4}{16} < \frac{8}{16}$$



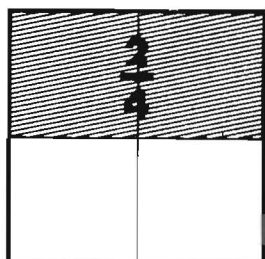
$<$



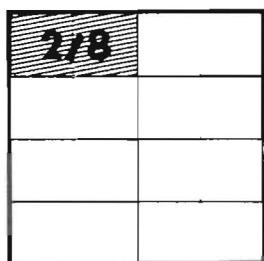
Ambos cuadrados los consideramos divididos en 16 partes. Consideramos cuatro partes del primero ($\frac{4}{16}$) y ocho partes del segundo ($\frac{8}{16}$).

El segundo es mayor que el primero. Decimos que a igual denominador es mayor el que tiene el numerador mayor.

$$\frac{2}{4} > \frac{2}{8}$$



>



La cantidad $\frac{2}{4}$ del cuadrado es mayor que la cantidad $\frac{2}{8}$ del mismo cuadrado. De dos quebrados con igual numerador es mayor el que tiene el denominador más pequeño.

$$7:3 = \frac{3}{7}$$

$$\frac{12}{15} = 12:15$$

Toda división puede expresarse en forma de quebrado. Todo quebrado es una división indicada.

Por ejemplo: ¿cuál de estos dos quebrados es mayor?

$$\frac{11}{23} \text{ y } \frac{17}{35}$$

Multipliquemos el numerador del primero por el denominador del segundo y viceversa. Así:

$$11 \times 35 = 385$$

$$17 \times 23 = 391$$

El numerador 17 es el que da mayor producto, por tanto

$$\frac{17}{35} > \frac{11}{23}$$

Siguiendo la regla anterior, podemos hallarnos ante un caso «extra». Suponga que efectúa las multiplicaciones y se encuentra con que los dos productos son *iguales*. ¿Cuál es el mayor? Evidentemente, ninguno; se trata de dos quebrados iguales. Lo que ocurre es que ambos quebrados expresan la misma cantidad, pero con diferentes números. En este caso, decimos que se trata de QUEBRADOS EQUIVALENTES. Vea un ejemplo:

$$\frac{9}{15} = \frac{36}{60}$$

Efectuando las multiplicaciones:

$$9 \times 60 = 540$$

$$36 \times 15 = 540$$

El producto resultante es idéntico en ambos casos: se trata de dos quebrados equivalentes o que expresan la misma cantidad.

CONDICION ESENCIAL DE EQUIVALENCIA

De lo dicho anteriormente deducimos que:

DOS QUEBRADOS SON EQUIVALENTES CUANDO EL PRODUCTO DEL NUMERADOR DE UNO DE ELLOS POR EL DENOMINADOR DEL OTRO ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS OTROS DOS TÉRMINOS.

$$\frac{9}{15} = \frac{36}{60} \text{ por cuanto } 9 \times 60 = 15 \times 36$$

TODO QUEBRADO EQUIVALE A UNA DIVISION INDICADA

Toda división puede indicarse en forma de número quebrado en el cual el dividendo de la división se convierte en el numerador y el divisor en denominador. Así, por ejemplo, la división 20:4 puede escribirse así:

$$\frac{20}{4}$$

Por contra, podemos expresar cualquier quebrado en forma de división normal:

$$\frac{274}{431} \text{ es lo mismo que } 274:431.$$

QUEBRADO EQUIVALENTE A UN ENTERO

Cuando en un quebrado determinado la división del numerador por el denominador nos da un cociente entero ($\frac{14}{2} = 14 : 2 = 7$), podemos

deducir, sin temor a equivocarnos, que tal quebrado equivale a un entero.

No es necesario que efectuemos la división para reconocer si el cociente es entero o no. Bastará que, recordando los caracteres de divisibilidad explicados en la lección anterior, compruebe si el numerador es múltiplo del denominador.

EXPRESION DE UN ENTERO EN FORMA DE QUEBRADO

Podemos también efectuar la operación inversa. Es decir, expresar un entero en forma de quebrado. Teniendo en cuenta la propiedad anterior, buscaremos cuál es el denominador que nos interesa colocarle al entero. Supongamos que el denominador sea 8 y el entero a convertir en quebrado sea 6.

Como la condición para que el quebrado sea igual a un entero se basa en que el numerador sea múltiplo del denominador, deberemos colocar por numerador el producto del denominador 8 por el entero; y como $6 \times 8 = 48$, tendremos:

$$6 = \frac{48}{8}$$

Expresar enteros en forma de quebrado, con el denominador que se desee, no es nada difícil.

QUEBRADO EQUIVALENTE A LA UNIDAD

De la propiedad anterior también podemos deducir que para expresar la unidad 1 en forma de quebrado bastará que denominador y numerador sean iguales. Con el mismo denominador del ejemplo precedente, 8, la unidad vendrá expresada por:

$$1 = \frac{8}{8}$$

La afirmación inversa, o sea, que un quebrado con numerador y denominador iguales vale una unidad, es verdadera.

NUMERO MIXTO

LLAMAMOS NÚMERO MIXTO AL QUE EXPRESA UNA CANTIDAD COMPUESTA POR UNIDADES ENTERAS Y PARTES DE LA UNIDAD.

Si usted se encuentra, por ejemplo, con el quebrado $\frac{123}{21}$, podrá apreciar a simple vista que es mayor que la unidad, por cuanto el numerador es mayor que el denominador. Ahora bien, ¿a cuántas unidades corresponde?

Efectuando la división tendremos: $123 : 21 = 5$.

Son cinco unidades enteras, pero nos sobra algo, puesto que el producto $21 \times 5 = 105$ y de 105 a 123 van: $123 - 105 = 18$. ¿Cuál será, pues, la expresión exacta? No sería ni más ni menos que ésta:

$$\frac{123}{21} = 5 \frac{18}{21}$$

$$\frac{4}{4}$$

1	2
3	4

$$= \frac{8}{8}$$

1	2
3	4
5	6
7	8

$$= \frac{16}{16}$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$$= 1$$

Todo quebrado con numerador y denominador iguales, expresa la unidad entera.

$$\frac{327}{42}$$

Para convertir un quebrado a mixto:

$$\begin{array}{r} 327 \\ 42 \overline{) 327} \\ \underline{33} \\ 7 \end{array}$$

Dividimos el numerador por el denominador. El cociente es la parte entera del número mixto. El resto es el numerador de la parte quebrada. El denominador es el mismo.

$$7 \frac{33}{42}$$

Para convertir un mixto a quebrado efectuamos la operación inversa.

$$\frac{7 \times 42 + 33}{42} = \frac{327}{42}$$

Expresión que se lee: cinco unidades y dieciocho veintiunavos; o bien cinco, dieciocho veintiunavos. Observe que el resto (18) de la división efectuada sirve como numerador de la parte quebrada. A este número se le conoce con la denominación de NÚMERO MIXTO, por estar compuesto de parte entera y parte quebrada.

En resumen:

CONVERSION DE UN QUEBRADO A MIXTO Y VICEVERSA

Para convertir un quebrado mayor que la unidad en un número mixto, se efectúa la división para obtener el cociente entero. Este cociente es el entero del número mixto cuya parte quebrada tendrá el mismo denominador que el quebrado de origen y por numerador el resto de la división efectuada.

Por ejemplo: convertir en número mixto el quebrado $\frac{230}{8}$.

$230 : 8 = 28$ y sobra un resto de 6 unidades.

El número mixto buscado será:

$$\frac{230}{8} = 28 \frac{6}{8}$$

Puede también presentarse el caso inverso del ejemplo anterior. O sea, que le den un número mixto y deba transformarlo únicamente en quebrado. Para conseguirlo hará lo siguiente: Para hallar el numerador deberá multiplicar la parte entera por el denominador, sumando al producto el numerador de la parte quebrada. Esta suma será el numerador definitivo del quebrado. Como denominador seguiremos usando el mismo que había.

Ejemplo: Convertir en quebrado la expresión $5 \frac{18}{21}$.

El numerador será:

$$(5 \times 21) + 18 = 123$$

El denominador será el mismo.

Luego:

$$5 \frac{18}{21} = \frac{123}{21}$$

SIMPLIFICACION DE QUEBRADOS

MINIMO COMUN MULTIPLO Y MAXIMO COMUN DIVISOR DE DOS NUMEROS

Antes de entrar de lleno en el tema de la simplificación de quebrados, haremos un inciso a fin de dejar sentados un par de conceptos.

En la primera lección indicamos lo que significaban los términos *múltiplo* y *divisor*. Pues bien, aparte de su uso en la divisibilidad, el principal interés de los múltiplos y divisores radica en la propiedad que tienen algunos de serlo al mismo tiempo de dos números distintos. Y quien dice dos, dice más. A esta clase de múltiplos y divisores se les denomina *comunes*. Veamos un par de ejemplos:

El número 24 es a la vez múltiplo de 2 y de 3, por cuanto:

$$2 \times 12 = 24$$

$$3 \times 8 = 24$$

o bien

$$24 : 2 = 12$$

$$24 : 3 = 8$$

Ambos números, 2 y 3, están contenidos un número exacto de veces en 24. Por lo tanto, 24 es a la vez múltiplo (o múltiplo común) de 2 y de 3.

Si tomamos ahora los números 24 y 32, por ejemplo, veremos que hay otros inferiores a ambos que los dividen exactamente. Así, por ejemplo:

$$24 : 8 = 3$$

$$24 : 4 = 6$$

$$24 : 2 = 12$$

$$32 : 8 = 4$$

$$32 : 4 = 8$$

$$32 : 2 = 16$$

Los números 8, 4 y 2 son divisores comunes de 24 y 32.

No obstante, no es ésta la propiedad que realmente interesa. En la práctica se prescinde de gran número de estos múltiplos y divisores comunes, tomando sólo en consideración el *menor* y el *mayor*, respectivamente, de éstos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO ES EL MENOR DE LOS MÚLTIPLOS COMUNES A DOS O MÁS NÚMEROS.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR ES EL MAYOR DE LOS DIVISORES COMUNES A DOS O MÁS NÚMEROS.

COMO HALLAR EL MAXIMO COMUN DIVISOR DE DOS NUMEROS

Empezaremos por hallar de una forma práctica el máximo común divisor de dos números cualesquiera.

Supongamos los números 328 y 544. A simple vista se aprecia que ambos números no son divisores el uno del otro, ya que la división $544 : 328$ deja un considerable resto.

Establecida esta premisa, dispondremos los dos números como si se tratara de efectuar una división normal:

$$\begin{array}{r} 544 \quad \overline{) 328} \\ 216 \quad 1 \end{array}$$

Con el resto 216 así obtenido y el divisor formaremos una nueva división:

$$\begin{array}{r} 328 \quad \overline{) 216} \\ 112 \quad 1 \end{array}$$

Repetiremos la operación con el resto 112 y el divisor 216:

$$\begin{array}{r} 216 \quad \overline{) 112} \\ 104 \quad 1 \end{array}$$

Y otra con 104 y 112:

$$\begin{array}{r} 112 \quad \overline{) 104} \\ 8 \quad 1 \end{array}$$

Finalmente

$$\begin{array}{r} 104 \quad \overline{) 8} \\ 0 \quad 13 \end{array}$$

Hemos llegado a un resto cero. Y ahora fíjese: EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR SERÁ EL ÚLTIMO DE LOS RESTOS HALLADOS QUE NO SEA CERO. El último

resto antes del 0 es el 8. Por tanto, éste será el m.c.d. (abreviatura de máximo común divisor) de los números 328 y 544. Efectuaremos la prueba:

$$544 : 8 = 68$$

$$328 : 8 = 41$$

Si el último de los restos resultara ser la unidad, nos hallaríamos ante un caso particular entre dos números o más. Cuando se da esta circunstancia, ambos números no tienen ningún divisor común superior a 1. Veámoslo a través de un ejemplo: 23 y 15.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 15} \\ 8 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \overline{) 8} \\ 7 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{) 7} \\ 1 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 1} \\ 0 \quad 7 \end{array}$$

El último resto, que no sea cero, es 1. Y por ser éste el *máximo* común divisor, se deduce que no puede haber ningún otro divisor común que sea superior a 1.

Se denomina *primos entre sí* a los números en los que concurre esta circunstancia. Existe infinidad de números que son primos con cualquier otro que sea inferior a ellos. Como pura curiosidad, citaré todos los números *primos* inferiores a 100.

1 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

MINIMO COMÚN MÚLTIPLO

Conocido el m.c.d. de dos o más números, es fácil hallar el mínimo común múltiplo de los mismos, puesto que:

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.) DE DOS NÚMEROS ES IGUAL AL PRODUCTO DE UNO DE ELLOS POR EL COCIENTE DE DIVIDIR EL OTRO POR EL M.C.D. DE LOS DOS.

Efectivamente. Tomando los números 55 y 33, hallaremos primeramente el m.c.d. de ambos:

	1	1	2	COCIENTES SUCESIVOS
55	33	22	11	DIVIDENDOS Y DIVISORES
22	11	0		RESTOS

m.c.d. de 55 y 33 = 11

Después dividiremos el menor de los números por dicho m.c.d.:

$$33 : 11 = 3$$

Y multiplicaremos el cociente por el mayor de los dos números:

$$55 \times 3 = 165$$

Comprobaremos ahora si 165 es múltiplo de 55 y de 33 a la vez:

$$165 : 55 = 3$$

$$165 : 33 = 5$$

Las dos divisiones son exactas, y por tanto 165 es efectivamente múltiplo común de 55 y de 33.

SIMPLIFICACION DE QUEBRADOS

Volvamos, tras este largo inciso, al tema de que tratamos en esta lección. Nos toca ahora uno de los capítulos más prácticos de los quebrados. Estoy seguro que usted habrá visto esos quebrados cuyos términos están compuestos por números de dos y más cifras.

Si le indicara que llevo ya instaladas las $\frac{37}{74}$ partes de un tendido

eléctrico, seguro que no sabría por dónde voy, ya que son demasiadas las partes que entran en juego. ¿No hay un sistema con el que pueda expresarse la misma cantidad pero en términos más sencillos? En la mayoría de los casos, sí.

Si repasa el apartado en el que tratábamos de la *equivalencia* (comparación de quebrados), verá que existen ciertos quebrados que, aun teniendo términos distintos, expresan las mismas cantidades, o sea, que *valen* lo mismo. El problema se reduce, por tanto, a convertir los quebrados con términos complicados en otros quebrados *equivalentes* cuyos términos sean más sencillos.

METODO PRACTICO

El método más práctico para reducir o simplificar quebrados es atender a los caracteres de divisibilidad que explicamos en la primera lección.

En el quebrado $\frac{7648}{9642}$ podemos apreciar a simple vista que los

dos términos iniciales 9642 y 7648 son divisibles por 2, por cuanto terminan en cifra par (condición esencial de la divisibilidad por 2). Por lo tanto podremos simplificarlo dividiendo por 2 su numerador y su denominador:

$$\frac{7648}{9642} = \frac{3824}{4821}$$

En el quebrado equivalente hallado la divisibilidad por 2 no es posible, por cuanto 4821 no termina en cifra par. Tampoco será divisible por 4 ni por 8, ya que 21 no es múltiplo ni de uno ni de otro. Para que fuese divisible por 3 sería necesario que $4 + 8 + 2 + 1 = 15$ fuera múltiplo de 3. ¿Lo es? $15 : 3 = 5$. ¡Sí! El denominador 4821 es divisible por 3; pero ¿y el numerador? Sumemos el valor absoluto de cada cifra: $3 + 8 + 2 + 4 = 17$. La suma *no* es múltiplo de 3. Por lo tanto, tampoco podemos simplificar el quebrado equivalente con el divisor 3, por no ser *común* a ambos términos.

Agotadas las posibilidades de reducción o simplificación mediante los 11 primeros números de la serie natural, deberemos acudir entonces al m.c.d. de ambos términos, recordando siempre que para que sea posible la simplificación es necesario que numerador y denominador se dividan por el *mismo número*. Al último quebrado obtenido se le denomina irreducible.

REDUCCION DE QUEBRADOS A COMUN DENOMINADOR

Si deseamos transformar dos o más quebrados en otros que, aun siendo equivalentes a los iniciales, tengan la propiedad de que sus denominadores sean todos iguales (cuya aplicación práctica verá cuando tratemos de las operaciones con quebrados), habremos de acudir a la *reducción a un común denominador*.

Existen dos sistemas de reducción a común denominador:

1.º Tomando como común denominador el producto de todos los denominadores.

2.º Tomando como común denominador el m.c.m. de los denominadores.

Valgámonos, para su explicación, de algunos ejemplos. Supongamos que los quebrados a reducir son:

$$\frac{24}{66}; \frac{4}{9}; \frac{3}{11}$$

En primer lugar, deberemos atender a si pueden o no simplificarse.

Los dos últimos quebrados $\frac{4}{9}$ y $\frac{3}{11}$ no tienen simplificación alguna.

En cambio, observaremos que ambos términos del primero terminan en cifra par. Se impone la simplificación dividiéndolos por 2.

$$\frac{24:2}{66:2} = \frac{12}{33}$$

Los términos de este quebrado equivalente son divisibles por 3; luego

$$\frac{12:3}{33:3} = \frac{4}{11}$$

Hemos llegado a un quebrado irreducible.

Efectuaremos por tanto la reducción a común denominador con los quebrados:

$$\frac{3}{11}, \frac{4}{9} \text{ y } \frac{4}{11} \text{ (este último equivalente a } \frac{24}{66})$$

Emplearemos el primer método: El producto de todos los denominadores es:

$$11 \times 9 \times 11 = 1089$$

Este producto será el denominador que colocaremos a cada uno de los quebrados equivalentes que hallaremos a continuación. Obtendremos los numeradores correspondientes a cada uno de los anteriores quebrados *multiplicando el numerador respectivo por todos los denominadores, menos el suyo.*

Así, el primer numerador será:

$$3 \times 9 \times 11 = 297$$

El segundo:

$$4 \times 11 \times 11 = 484$$

Y el tercero:

$$4 \times 9 \times 11 = 396$$

Con lo que los quebrados quedarían de esta forma:

$$\frac{3}{11} = \frac{297}{1089}; \frac{4}{9} = \frac{484}{1089}; \frac{4}{11} = \frac{396}{1089}$$

Todos los quebrados equivalentes hallados tienen el mismo denominador. Ahora sólo restaría reducirlos, teniendo en cuenta que el denominador ha de seguir siendo igual para todos ellos. Veamos si hay alguna posibilidad. El primer numerador es múltiplo de 11 (por cuanto $2 + 7 = 9$, y $9 - 9 = 0$). El segundo numerador también es múltiplo de 11 ($4 + 4 = 8$; $8 - 8 = 0$). El tercer numerador sigue siendo múltiplo de 11 ($3 + 6 = 9$; $9 - 9 = 0$). Y finalmente el denominador también es múltiplo de 11 ($8 + 1 = 9$; y como $9 + 0 = 9$; $9 - 9 = 0$). Por tanto, 11 es divisor de todos los miembros.

Efectuando las divisiones, nos quedamos con:

$$\frac{297:11}{1089:11} = \frac{27}{99} \quad \frac{484:11}{1089:11} = \frac{44}{99} \quad \frac{396:11}{1089:11} = \frac{36}{99}$$

Los tres quebrados son ya irreducibles, si queremos seguir con el denominador común a todos. En resumen:

$$\frac{3}{11}; \frac{4}{9}; \frac{4}{11} = \frac{297}{1089}; \frac{484}{1089}; \frac{396}{1089} = \frac{27}{99}; \frac{44}{99}; \frac{36}{99}$$

respectivamente.

Con este sistema tiene más que suficiente para resolver cuantos casos se le presenten, por lo que creo innecesario explicar el segundo sistema. En los capítulos de Álgebra aplicaremos, por lo contrario, este último, consistente en utilizar el m.c.m. de los denominadores. Por dicho motivo, he creído oportuno mencionarlo aquí, para que luego no le coja de sorpresa.

OPERACIONES CON LOS QUEBRADOS

SUMA

Para poder sumar quebrados, necesitamos que todos ellos tengan un mismo denominador, o sea, que estén referidos a una misma «unidad fraccionaria», como suele llamarse al denominador.

Por tanto, pueden presentárenos tres casos:

- 1.º Que tengamos que sumar quebrados que ya tengan el mismo denominador.
- 2.º Sumar quebrados con distinto denominador.
- 3.º Sumar números mixtos.

Analicemos cada uno de los citados casos. Cuando se trata de sumar quebrados cuyo denominador es común, bastará con sumar los numeradores, y colocar el denominador inicial a esta suma.

$$\frac{3}{9} + \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{3+6+9}{9} = \frac{18}{9}$$

Si el denominador, por lo contrario, es distinto para todos los quebrados a sumar, deberemos primeramente *reducirlos a común denominador*, según el sistema que usted ya vio, y luego efectuar la suma como en el caso precedente.

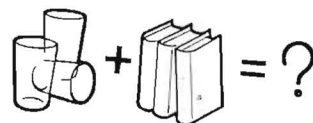
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{9} &= \frac{3 \times 8 \times 9}{4 \times 8 \times 9} + \frac{5 \times 4 \times 9}{8 \times 4 \times 9} + \frac{7 \times 4 \times 8}{9 \times 4 \times 8} = \\ &= \frac{216}{288} + \frac{180}{288} + \frac{224}{288} = \frac{620}{288} \end{aligned}$$

Finalmente, si se trata de sumar números mixtos, podremos hallarnos con dos casos:

- 1.º Sumar únicamente números mixtos.
- 2.º Que entre los sumandos haya algún entero.

Veamos el primer caso por medio de un ejemplo. Supongamos los números mixtos $3\frac{1}{2}$; $6\frac{7}{9}$; y $5\frac{2}{3}$, que deseamos sumar. Podemos efectuar

la suma de los enteros y la suma de los quebrados por separado, y luego sumar los resultados. Podemos efectuar la suma de los enteros y la suma de los quebrados por separado, y luego sumar los resultados.



$$\frac{3}{9} + \frac{3}{7} = ?$$

No podemos sumar vasos con libros, como no podemos sumar novenos con séptimos. Son fracciones de distinto numerador.

$$\frac{21}{63} + \frac{27}{63} = \frac{48}{63}$$

Para sumar los dos quebrados debemos transformarlos en otros equivalentes con el mismo denominador.

tuarlo de dos maneras: reduciendo el número mixto a un quebrado, o sumando por separado enteros y quebrados.

a) Reduciéndolos a quebrados:

Se multiplica el número entero por el denominador:

$$3 \times 2 = 6 \quad 6 \times 9 = 54 \quad 5 \times 3 = 15$$

Al producto se le añade el numerador:

$$6 + 1 = 7 \quad 54 + 7 = 61 \quad 15 + 2 = 17$$

Esta suma será el nuevo numerador, al que se colocará el denominador que tenía en la parte quebrada:

$$\frac{7}{2} \quad \frac{61}{9} \quad \frac{17}{3}$$

O sea:

$$3 \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad 6 \frac{7}{9} = \frac{61}{9} \quad 5 \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

Y ahora el caso se resuelve reduciendo a común denominador los tres quebrados:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} + \frac{61}{9} + \frac{17}{3} &= \frac{7 \times 9 \times 3}{2 \times 9 \times 3} + \frac{61 \times 2 \times 3}{9 \times 2 \times 3} + \frac{17 \times 2 \times 9}{3 \times 2 \times 9} = \\ &= \frac{189}{54} + \frac{366}{54} + \frac{306}{54} = \frac{861}{54} \end{aligned}$$

Si deseamos saber cuántos enteros tenemos, dividiremos el numerador por el denominador:

$$\begin{array}{r} 861 \overline{) 54} \\ 321 \\ \hline 51 \end{array}$$

El cociente indica la parte entera, 15. Y con el *resto* de la división como *numerador*, y el *divisor* como *denominador*, formaremos la parte quebrada de este nuevo número mixto, que será la suma de los tres dados:

$$3 \frac{1}{2} + 6 \frac{7}{9} + 5 \frac{2}{3} = \frac{7}{2} + \frac{61}{9} + \frac{17}{3} = \frac{861}{54} = 15 \frac{51}{54}$$

También podríamos recurrir a sumar por separado enteros y quebrados de los números mixtos:

$$\begin{aligned} 3 + 6 + 5 &= 14 \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{9} + \frac{2}{3} &= \frac{1 \times 9 \times 3}{2 \times 9 \times 3} + \frac{7 \times 2 \times 3}{9 \times 2 \times 3} + \frac{2 \times 2 \times 9}{3 \times 2 \times 9} = \\ &= \frac{27}{54} + \frac{42}{54} + \frac{36}{54} = \frac{105}{54} \end{aligned}$$

En este último quebrado, por ser el numerador mayor que el denominador, habrá una porción entera. Efectuando la división como en el caso anterior, tenemos:

$$\begin{array}{r} 105 \overline{) 54} \\ 51 \\ \hline 1 \end{array}$$

Tenemos un entero más y como parte quebrada $\frac{51}{54}$. Sumando este entero a los 14 que sumaban los mixtos, tendremos finalmente:

$$14 + 1 = 15$$

Y el resultado

$$15 \frac{51}{54}$$

es idéntico al hallado con el otro sistema.

Si entre los sumandos mixtos hay algún entero, sin porción quebrada, el segundo de los sistemas explicados anteriormente no presenta problema alguno, puesto que los enteros los sumábamos por separado; pero en el primero sí, ya que nos encontramos con un sumando sin denominador alguno. Ahora bien, todo entero puede expresarse en forma de quebrado colocándole como denominador la unidad. Así, 7 unidades puede

indicarse así en forma de quebrado: $\frac{7}{1}$. El problema, pues, se reduce a

indicar el número entero en forma de quebrado, reducir todos los quebrados a común denominador, hallar la parte entera efectuando la división del numerador por el denominador, y ¡listo!

RESTA

En la resta encontramos los mismos casos que en la suma, y su resolución también es idéntica a la que se daba para ésta.

Con quebrados de idéntico denominador, se restan los numeradores y se coloca el mismo denominador.

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$$

Con quebrados de distinto denominador, se reducen éstos a común denominador y se restan luego los numeradores.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} - \frac{3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$$

Puede ocurrirnos que debamos restar un quebrado de otro menor que él:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} - \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15} - \frac{10}{15} = \frac{9-10}{15} = -\frac{1}{15}$$

El resultado, entonces, es un número negativo precedido, como es natural, del signo menos (—).

MULTIPLICACION

La multiplicación de quebrados no presenta dificultad alguna, por cuanto en esta operación no debe recurrir a la reducción a común denominador. PARA MULTIPLICAR DOS O MÁS QUEBRADOS, BASTA CON MULTIPLICAR LOS NUMERADORES ENTRE SÍ Y TAMBIÉN LOS DENOMINADORES ENTRE SÍ.

El primer producto (producto de los numeradores) será el numerador de la fracción o quebrado resultante, mientras el segundo producto (producto de los denominadores) será el denominador de este quebrado resultante:

$$\frac{8}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{(8 \times 7)}{(9 \times 3)} = \frac{56}{27}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{8}{13} = \frac{(2 \times 4 \times 8)}{(3 \times 7 \times 13)} = \frac{64}{273}$$

Si hay parte mixta, se reduce el número mixto a quebrado; se opera de igual forma que con quebrados sólo y luego se halla la parte entera del quebrado resultante.

$$3\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{(3 \times 4) + 3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{15}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{15 \times 2}{4 \times 5} = \frac{30}{20}$$

$$30 : 20 = 1; \text{ resultado: } 1\frac{10}{20} = 1\frac{1}{2}$$

Si uno de los factores es entero, se multiplica éste por el numerador del quebrado y el producto obtenido se coloca como numerador del quebrado resultante.

$$8 \times \frac{27}{35} = \frac{8 \times 27}{35} = \frac{216}{35}$$

$$216 : 35 = 6; \text{ resultado: } 6\frac{6}{35}$$

DIVISION

En la división debe tenerse muy en cuenta la posición del dividendo y del divisor, ya que una alteración de ambos produciría un resultado falso. Para resolver la división, se multiplica el *numerador del dividendo* por el *denominador del divisor*. Este producto nos servirá de numerador para el quebrado resultante.

El producto del *denominador del dividendo* por el *numerador del divisor* servirá, por tanto, de denominador resultante. Observe unos cuantos casos:

$$\frac{7}{12} : \frac{4}{5} = \frac{35}{48}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{11} = \frac{3 \times 11}{5 \times 7} = \frac{33}{35}$$

$$\frac{12}{15} : \frac{37}{51} = \frac{12 \times 51}{15 \times 37} = \frac{612}{555} = 1\frac{57}{555}$$

Una forma de recordar la regla de la división de quebrados es pensar que deben multiplicarse en cruz: numerador por denominador, igual a numerador

El cociente de $\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$ es $\frac{33}{35}$. Si invertimos los dos términos del *divisor*, convirtiendo al numerador en denominador y viceversa, $\frac{11}{7}$,

y cambiamos el signo de dividir por el de multiplicar (o sea, multiplicamos los dos quebrados, en lugar de dividirlos), veremos que nos da el mismo resultado:

$$\frac{3}{5} \times \frac{11}{7} = \frac{3 \times 11}{5 \times 7} = \frac{33}{35}$$

¿Qué consecuencia práctica podemos obtener de esta observación? Para no equivocarnos en el resultado, al efectuar una división, lo mejor es invertir los términos del divisor y multiplicar los dos quebrados. De esta forma, el numerador y el denominador del quebrado resultante serán los correctos. No le extrañe que recalque con tanta insistencia la conveniencia de vigilar el orden de colocación de numerador y denominador. Observé con un ejemplo cómo puede cambiar el resultado de la operación, si alteramos el lugar que le corresponde a cada uno de los quebrados:

$$\frac{2}{7} : \frac{5}{8} = \frac{2 \times 8}{7 \times 5} = \frac{16}{35}$$

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{7} = \frac{5 \times 7}{8 \times 2} = \frac{35}{16} = 2 \frac{3}{16}$$

Como ve, el resultado es completamente distinto, aun cuando los dos quebrados iniciales sean los mismos.

NUMEROS RECÍPROCOS O INVERSOS

Aclarado este punto, vamos a hacer otro inciso, a fin de explicar un «detalle» que hemos mencionado en el párrafo anterior. Habrá observado que indicábamos la conveniencia de *invertir* los dos términos del quebrado que actúa de divisor. Al quebrado así obtenido, se le denomina *recíproco o inverso* del quebrado original.

Así, por ejemplo, $\frac{5}{2}$ es el recíproco o inverso de $\frac{2}{5}$, y viceversa,

$\frac{2}{5}$ podría ser el recíproco o inverso de $\frac{5}{2}$. Lo mismo ocurre con los

números enteros. El recíproco de 7 será $\frac{1}{7}$, puesto que ya dijimos que

cualquier entero puede representarse en forma de quebrado, colocándole

la unidad por denominador y por tanto recíproco de $\frac{7}{1}$ es $\frac{1}{7}$.

La propiedad fundamental que tienen los números recíprocos o inversos es que, multiplicados entre sí, su producto *siempre es igual a la*

unidad. Si multiplicamos $\frac{7}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$.

DIVISION DE UN ENTERO POR UN QUEBRADO

Volvamos al tema de la división. Si debemos dividir un entero por un quebrado, bastará multiplicar el entero por el denominador del quebrado divisor. El producto se colocará como numerador del quebrado

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

El cociente de dos quebrados es igual al producto del quebrado dividiendo por el inverso del divisor.

resultante, mientras el numerador del divisor pasará ahora a denominador.

$$8: \frac{2}{3} = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

DIVISION DE UN QUEBRADO POR UN ENTERO

Si, por lo contrario, es el quebrado el que debe dividirse por un entero, será el denominador del quebrado *dividendo* el que se multiplica por el entero y el producto se coloca de denominador del nuevo quebrado. El numerador seguirá siendo el mismo:

$$\frac{7}{15} : 6 = \frac{7}{15 \times 6} = \frac{7}{90}$$

Ahora bien, si en este último caso el *numerador* del quebrado *dividendo* resultara *múltiplo del entero*, bastará dividir este numerador por el entero, y el *cociente* obtenido se coloca como numerador del quebrado resultante:

$$\frac{12}{35} : 4 = \frac{12:4}{35} = \frac{3}{35}$$

Veamos si es verdad. Dividamos normalmente:

$$\frac{12}{35} : 4 = \frac{12}{35 \times 4} = \frac{12}{140}$$

Como 12 y 140, son múltiplos de 4, simplificaremos el quebrado resultante:

$$\frac{12:4}{140:4} = \frac{3}{35} \quad \text{Resultado idéntico al obtenido con el otro sistema.}$$

DIVISION DE QUEBRADOS DE IGUAL DENOMINADOR

Si los dos quebrados tuvieran el mismo denominador, bastará colocar el numerador del quebrado *dividendo* como numerador del quebrado resultante y el numerador del quebrado *divisor* como denominador:

$$\frac{17}{42} : \frac{35}{42} = \frac{17}{35}$$

Veamos el porqué. Efectuando la división normalmente:

$$\frac{17}{42} : \frac{35}{42} = \frac{17 \times 42}{42 \times 35} = \frac{17 \times 42}{35 \times 42} = \frac{17}{35} \times \frac{42}{42} = \frac{17}{35} \times 1 = \frac{17}{35},$$

por cuanto un quebrado multiplicado por la unidad da por producto el mismo quebrado.

Si, finalmente, el numerador y denominador del quebrado *dividendo* son múltiplos respectivamente del numerador y denominador del quebrado *divisor*, la división se reducirá a dividir por separado los dos numeradores y los dos denominadores, colocando sus cocientes respectivos en los mismos lugares en que se encuentran:

$$\frac{42}{9} : \frac{7}{81} = \frac{42:7}{81:9} = \frac{6}{9}$$

QUEBRADO DE UN QUEBRADO

Podemos hallarnos en la necesidad de expresar sólo una parte de otra parte de la unidad. Por ejemplo, si queremos indicar que de las tres quintas partes del cable que utilizamos para nuestra instalación nos sobra un sexto de ellas, lo haremos de esta forma:

$$\text{Sobra } \frac{1}{6} \text{ de } \frac{3}{5}$$

Con respecto a la unidad, ¿qué cantidad indica esa expresión? El denominador 6 del primer quebrado expresa que hemos dividido la porción $\frac{3}{5}$ en 6 partes iguales. Dividamos, pues:

$$\frac{3}{5} : 6 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Este último quebrado nos indica que cada sexta parte de $\frac{3}{5}$ equivale a la décima parte de la unidad. Por tanto:

$$\frac{1}{6} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{1}{10} \text{ de la unidad.}$$

$$\frac{2}{6} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{2}{10} \text{ de la unidad, etc.}$$

También puede encontrarse con este raro quebrado:

$$\frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{5}}$$

En él, los dos términos del quebrado general son respectivamente otros quebrados. A simple vista parece algo complicadísimo; pero si se da cuenta de que el trazo horizontal mayor indica una división entre los dos términos, verá que el quebrado se resuelve dividiendo normalmente ambos términos.

$$\frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{6} : \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{6 \times 4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

POTENCIACION DE QUEBRADOS

Por potenciar un quebrado, nos referimos al quebrado en general, no a sus términos por separado. Un quebrado puede tener uno de sus términos potenciados, como veremos en el capítulo de Algebra; pero ello no indica que el quebrado esté potenciado también.

$$\left(\frac{4}{15}\right)^3 ; \frac{4^3}{15}$$

De estos dos quebrados sólo el primero está potenciado.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{15}\right)^5$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^8 : \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^5$$

Para operar con quebrados exponentiados deben seguirse las mismas reglas que para los números enteros.

$$\sqrt{\frac{36}{81}}$$

Para que un quebrado esté radicado la raíz debe afectar a sus dos miembros.

$$\sqrt{\frac{36}{81}}$$

En este caso no podemos hablar de raíz de un quebrado, sino de un quebrado con un miembro radicado.

O sea, que al potenciar el quebrado se elevan los *dos* términos a un mismo exponente. La expresión toma la forma:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

La letra n indica que en su lugar puede colocarse *cualquier* exponente. Partamos de un caso concreto. Queremos elevar al cuadrado el quebrado $\frac{6}{7}$. Primero escribiremos: $\left(\frac{6}{7}\right)^2$. Y a continuación resolveremos el problema elevando los dos términos al cuadrado: $\frac{6^2}{7^2} =$

$$= \frac{6 \times 6}{7 \times 7} = \frac{36}{49}$$

También podemos efectuar la anotación inversa, o sea, partiendo del resultado: $\frac{36}{49} = \frac{6^2}{7^2} = \left(\frac{6}{7}\right)^2$, ya que las tres expresiones son equivalentes.

Para sumar, restar, multiplicar o dividir quebrados exponentiados (o sea, potenciados), deben seguirse las mismas reglas que para los números enteros.

RADICACION DE QUEBRADOS

Otro tanto ocurre con la radicación. El que un término esté radicado no indica que lo sea el quebrado. Para hallar la raíz cuadrada, por ejemplo, de un quebrado cualquiera deben radicarse los *dos términos*. En el caso:

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

Aquí he de encarecerle que tenga muy en cuenta la forma de indicar la radicación de un quebrado. El signo radical mal puesto puede llevar a error interpretativo de consecuencias fatales. Veamos, por ejemplo, esta expresión:

$$\frac{\sqrt{25}}{144}$$

¿Qué indica? Por un lado puede interpretarse como raíz cuadrada del quebrado entero; por otro, también puede indicar que sólo el numerador está radicado. La diferencia entre ambas expresiones es enorme, como puede comprobar efectuando las operaciones indicadas:

1.º Raíz cuadrada del quebrado:

$$\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$$

2.º Raíz cuadrada sólo del numerador:

$$\frac{\sqrt{25}}{144} = \frac{5}{144}$$

Entre las expresiones $\frac{5}{12}$ y $\frac{5}{144}$ media un abismo. De ahí la capital importancia de la correcta anotación del signo de radicar.

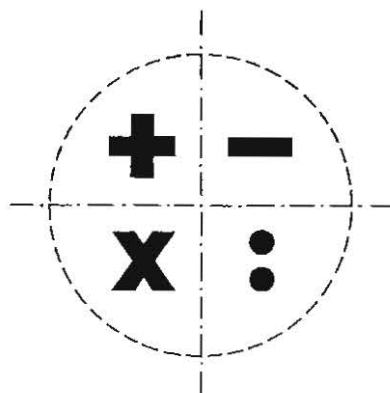
MATEMATICAS

Fracciones decimales

Lectura

Operaciones con decimales

Problemas



LECCION N^o 3

ARITMETICA

Lección tercera

Fraciones decimales - Lectura de números decimales - Transformación de un número decimal a fracción ordinaria - Operaciones con números decimales - Suma, resta, multiplicación y división - Fracciones periódicas - Potenciación de números decimales - Radicación de decimales.

FRACCION DECIMAL

Al hablar de quebrados dejamos indicada una de sus clases: aquellos cuyo denominador era la unidad seguida de ceros. Según dijimos, se leía primero el numerador y luego las *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, etcétera, según que el denominador fuese 10, 100, 1000. A estos quebrados o fracciones se les llama *fracciones decimales*.

La forma usual de escribir estas fracciones sería la normal de todo quebrado: numerador y denominador separados por un trazo horizontal. La llamaremos fracción *ordinaria* decimal, por cuanto sigue el mismo orden, la misma disposición, que los demás quebrados.

Pero en estas fracciones podemos prescindir del denominador, siempre y cuando esté indicado de una forma u otra. Esta forma ha de ser fácil de recordar y debe ser recíproca, o sea, que podamos pasar de fracción ordinaria al sistema escogido, o del sistema escogido a fracción ordinaria, sin necesidad de efectuar operaciones.

¿Cómo? El numerador, desde luego, sí que deberá escribirse; y partiendo de éste indicaremos el denominador con una *coma* ('), de forma que a su derecha queden *tantas cifras del numerador como ceros tenga el denominador*. Vea unos ejemplos:

$$\frac{7654}{1000} = 7'654 \qquad \frac{87354}{100} = 873'54$$

Para separar las cifras que deben ir detrás de la coma (o sea, a su derecha) deberemos empezar a contar siempre por la cifra del numerador que indica las unidades, y hacia la izquierda. En el primer ejemplo hemos partido del 4, luego el 5, y el 6 era la cifra que correspondía al tercer cero del denominador; luego hemos puesto la coma, y hemos seguido con el resto de los números.

Al número que así nos resulta, 7'654, se le denomina *número decimal*, para diferenciarlo de la fracción decimal ordinaria.

Observe que en los ejemplos tomados el numerador es mayor que el denominador. Por eso el número decimal tiene una parte entera (cifras que quedan a la izquierda de la coma) y una parte decimal (cifras que quedan a la derecha de la coma). Pero no siempre será igual. Podemos

Fracción ordinaria

$$\frac{34}{1000} =$$
$$= 0'034$$

Número decimal

encontrarnos con los casos siguientes: Que el denominador tenga más ceros que cifras el numerador; y que el denominador tenga tantos ceros como cifras el numerador. En estos casos se sigue la regla general (se cuenta a partir de la cifra de las unidades hacia la izquierda), y al llegar a la última cifra del numerador añadimos ceros hasta completar los del denominador. Colocamos la coma; y para indicar que no hay parte entera alguna anotaremos otro cero, a la izquierda de la coma:

$$\frac{25}{100} = 0'25 \quad \frac{275}{10.000} = 0'0275$$

Unidades
Décimas
Centésimas
Milésimas
Diezmilésimas
Cienmilésimas

0'03011

Tres mil once
cienmilésimas.

La denominación es la
que corresponde al último
orden decimal.

Será el numerador

0'002

Cifras decimales

||

2
1.000

Ceros

Conversión de un decimal
a fracción ordinaria.

LECTURA DE NUMEROS DECIMALES

Para leer los números decimales utilizaremos las mismas denominaciones adoptadas para las fracciones ordinarias decimales. En el ejemplo anterior, el primer número se leería *veinticinco centésimas*, tanto en la fracción ordinaria como en el número decimal resultante. Sólo varía esta regla si hay parte entera. Supongamos la fracción ordinaria

$$\frac{389}{100} = 3'89.$$

Como fracción ordinaria se lee: $\frac{389}{100}$, trescientas ochenta y nueve centésimas.

Como número decimal: 3'89, tres enteros ochenta y nueve centésimas, aunque lo normal es decir: tres, coma, ochenta y nueve centésimas.

Observe la denominación de las cifras, según el lugar que ocupan a la derecha de la coma:

0 ' 1
0 ' 1 2
0 ' 1 2 3
0 ' 1 2 3 4
0 ' 1 2 3 4 5
0 ' 1 2 3 4 5 6

Décimas
Centésimas
Milésimas
Diezmilésimas
Cienmilésimas
Millonésimas

TRANSFORMACION DE UN DECIMAL EN FRACCION ORDINARIA

Para efectuar el paso del número decimal a la fracción ordinaria, colocaremos el número decimal como numerador, SIN LA COMA, y como denominador situaremos la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número en cuestión (cifras a la derecha de la coma).

$$3'753 = \frac{3753}{1000} \quad 0'003 = \frac{3}{1000}$$

En el numerador del segundo ejemplo se han suprimido los ceros que precedían al 3, por cuanto usted ya sabe que los ceros delante de las cifras significativas no expresan nada. Se entiende por cifras significativas las que tienen algún valor, como son todas las que van del 1 al 9. El cero, por sí solo, no tiene valor alguno. Un número decimal tampoco varía si se suprimen todos los ceros que figuren a la derecha de las cifras significativas:

$$\begin{aligned} 000700'567000 &= 700'567 \\ 0'00500 &= 0'005 \end{aligned}$$

Y recíprocamente, su valor sigue inalterable si detrás de las cifras significativas colocamos los ceros que nos convengan:

$$0'05 = 0'0500 = 0'050000$$

El número decimal representa parte de un todo, de una unidad, pero sin llegar a ella. Con él se puede operar exactamente igual que con los números enteros, siguiendo unas ciertas reglas. Vamos a exponer brevemente aquellas que más nos interesan.

SUMA DE NUMEROS DECIMALES

Se suman igual que los enteros, pero procurando que la coma de cada uno de los sumandos se corresponda con la de los demás, en una misma vertical. La suma de todos ellos llevará la coma también sobre la citada vertical:

$$\begin{array}{r} 3567'89675 \\ + \quad 23'678 \\ \quad 123'8725 \\ 12345'83512 \\ \hline 16061'28237 \end{array}$$

Observe cómo el punto de partida para la colocación de los sumandos es siempre la coma. A partir de ella, se va anotando los enteros a la izquierda y los decimales a la derecha. Vea también cómo se corresponden las décimas con las décimas, las centésimas con las centésimas, etc.

RESTA

Se colocan minuendo y sustraendo de forma que se corresponda la coma, y luego se procede a restar normalmente:

$$\begin{array}{r} 76548'645 \\ - 2387'427 \\ \hline 74161'218 \end{array}$$

Si el minuendo tuviera menos cifras decimales que el sustraendo, bastará colocar tantos ceros como sean precisos detrás de las cifras significativas:

$$\begin{array}{r} 6455'87000 \\ - 254'67692 \\ \hline 6201'19308 \end{array}$$

~~00700~~

Los ceros a la izquierda de un entero no significan nada.

~~0'5670~~

Los ceros a la derecha de un número decimal no alteran su valor.

No obstante, no será necesario escribir estos ceros. Basta con imaginarlos allí donde no hay cifras.

MULTIPLICACION

En las dos operaciones precedentes la situación de la coma no ofrece ninguna duda, ya que debe corresponderse con la de los datos. Pero en la multiplicación no ocurre lo mismo. Cuando deban multiplicarse dos números decimales, se colocarán los datos de forma que se correspondan las dos cifras extremas de la derecha:

$$\begin{array}{r} 34'25 \\ \times 6'5 \\ \hline \end{array}$$

Se efectúa la operación normalmente, prescindiendo de la coma, o sea como si fueran enteros:

$$\begin{array}{r} 34'25 \\ \times 6'5 \\ \hline 17125 \\ 20550 \\ \hline 222625 \end{array}$$

Hemos obtenido las cifras que componen el número decimal, pero nos falta discernir dónde va situada la coma. No es difícil. Basta sumar el número de cifras decimales de los dos factores. El número resultante será el de las cifras a separar, empezando a contar por la derecha, para encontrar el lugar donde quedará situada la coma:

34'25	cifras decimales:	2
$\times 6'5$	» »	+ 1
<hr/>		<hr/>
17125	» »	3
20550		<hr/>
<hr/>		
222'625		

Si en el multiplicando o en el multiplicador, o en ambos a la vez, hay un decimal puro (sin parte entera), se efectuará la multiplicación normalmente con las cifras significativas. Luego, en el producto, se separan tantas cifras como decimales haya entre los dos factores. Si resultara que el número de cifras es inferior al de decimales, añadiremos ceros hasta igualarlas: se coloca la coma y, a su izquierda, se coloca otro cero:

0'56347	cifras decimales:	5
$\times 0'023$	» »	+ 3
<hr/>		<hr/>
169041	» »	8
112694		<hr/>
<hr/>		
1295981		
<hr/>		
0'01295981		

DIVISION

En la división se presentan nuevas complicaciones. Veámoslas a través de ejemplos:

DIVISIÓN DE UN ENTERO POR UN DECIMAL

Veamos primero el caso de la división de un entero por un decimal:

$$346 : 2'4$$

Recuerde que en toda división, si se multiplican dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no varía.

Por otro lado sabremos que al multiplicar un número decimal por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga, se suprime la coma.

En nuestro ejemplo, basándonos en estos dos principios, multiplicaremos los dos miembros de la división por 10, y tendremos:

$$\begin{array}{l} 346 \times 10 = 3460 \\ 2'4 \times 10 = 24 \end{array}$$

o sea que:

$$346 : 2'4 = 3460 : 24$$

Efectuaremos la división normalmente:

$$\begin{array}{r} 3460 \quad | \quad 24 \\ 106 \quad \underline{} \\ 100 \quad 144 \\ 04 \end{array}$$

Nos da 144 enteros, con un resto igual a 4. La división es inexacta si sólo tenemos en cuenta los enteros. Para seguir con decimales pondremos una coma al cociente, y un cero al lado del resto, continuando la división:

$$\begin{array}{r} 3460 \quad | \quad 24 \\ 106 \quad \underline{} \\ 100 \quad 144'166 \\ 040 \\ 160 \\ 160 \\ 16 \end{array}$$

FRACCIONES PERIÓDICAS

Ahora, por más ceros que pusiéramos al resto y más cifras al cociente, siempre nos quedaría como resto 16. Y si no lo cree, puede hacer la prueba. Como curiosidad matemática, ya que utilidad práctica no tiene mucha, sepa que a esta clase de decimales se les denomina decimales periódicos, o fracciones periódicas. Estas fracciones decimales periódicas serán periódicas puras cuando la cifra o grupo de cifras que se repite es la que sigue inmediata a la coma. Cuando el período (cifra o grupo) se manifiesta después de un cierto número de cifras decimales,

0'501501501

Períodos. La división que proporciona un cociente de este tipo es indefinida.

0'35 | **8**
30 **0'04375**
60
40
0

División de un decimal por un entero. En este caso, el cociente es un decimal exacto.

se habla de una fracción decimal periódica mixta o impura. Estas pueden a su vez ser periódicas puras o periódicas mixtas, según que la cifra que se repita sea la que sigue a la coma o, como en el caso de la división anterior, haya una o varias cifras decimales después de la coma y antes de la cifra que se repite.

DIVISIÓN DE DOS DECIMALES

Si en lugar de un entero colocamos como dividendo otro decimal, la cosa no varía. Bastará correr la coma hacia la derecha una cantidad igual de cifras en el dividendo y en el divisor hasta que uno de ellos se quede sin decimales:

$$345'765 : 23'2$$

corriendo la coma

$$3457'65 : 232$$

En realidad hemos multiplicado por 10.

Ahora se divide normalmente hasta llegar a la coma:

$$\begin{array}{r} 3457'65 \quad | \quad 232 \\ 1137 \quad \quad \quad \\ \hline 209 \quad \quad \quad 14 \end{array}$$

se coloca la coma en el cociente, y se sigue dividiendo, *bajando* ceros en los restos parciales.

$$\begin{array}{r} 3457'65 \quad | \quad 232 \\ 1137 \quad \quad \quad \\ \hline 209 \ 6 \quad \quad 14'903 \\ 00 \ 850 \\ \hline 154 \end{array}$$

Podríamos seguir dividiendo hasta cansarnos con sólo *bajar* ceros detrás de cada resto. No obstante, nunca suelen tomarse más de cuatro decimales. Lo normal son dos o tres cifras solamente.

Ya hemos visto los casos principales de división.

Pero antes de dar por terminada la división citaremos una particularidad dentro del caso decimal por decimal, o entero por decimal: cuando dividendo o divisor, o ambos a la vez, son decimales puros, sin parte entera. El sistema es siempre el mismo.

Supongamos la división:

$$0'34 : 0'6$$

Multiplicando los dos términos por 10 para suprimir la coma (puesto que en 0'6 sólo hay *una* cifra decimal), tendremos:

$$0'34 : 0'6 = 3'4 : 6$$

Con lo que la división se nos reduce a dividir un decimal por un entero. El proceso a seguir sería:

$$\begin{array}{r} 3'4 \quad | \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Sígame el razonamiento: tres entre seis, no cabe, caben a cero, o sea

$$\begin{array}{r} 3'4 \quad | \quad 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bajo el cuatro y pongo la coma:

$$\begin{array}{r} 3'4 \quad | \quad 6 \\ \hline 0' \end{array}$$

Ahora tengo treinta y cuatro entre seis que caben a cinco:

$$\begin{array}{r} 3'4 \quad | \quad 6 \\ 4 \quad \quad \quad \hline 0'5 \end{array}$$

Bajo un cero y caben a seis.

$$\begin{array}{r} 3'4 \quad | \quad 6 \\ 40 \quad \quad \quad \hline 4 \quad 0'56 \end{array}$$

Bajo otro cero y caben a seis... y así sucesivamente. Es una fracción periódica impura.

Como ve, el proceso a seguir es el mismo en todos los casos. En cuanto se llega al término de los enteros en el dividendo, se coloca una coma en el cociente, y se sigue dividiendo.

POTENCIACION DE DECIMALES

Teniendo en cuenta que potenciar un número es multiplicarlo por sí mismo tantas veces como indica el exponente, al potenciar un decimal se sigue el mismo proceso que en la multiplicación, teniendo en cuenta, en cada multiplicación parcial, el lugar que debe ocupar la coma:

$\begin{array}{r} 2'2^8 \\ \times 2'2 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 4'84 \\ \times 2'2 \\ \hline 968 \\ 968 \\ \hline 10'648 \end{array}$	<p>una cifra decimal + una cifra decimal</p> <p>dos cifras decimales + una cifra decimal</p> <p>tres cifras decimales</p>
--	---

Habrán cinco cifras decimales.

$$0'2^5 =$$

$$= 0'00032$$

Cinco decimales

Al potenciar decimales debe tenerse en cuenta el lugar que ocupará la coma.

CUANDO EL DECIMAL NO TIENE PARTE ENTERA ALGUNA, LA POTENCIA ES MENOR QUE LA BASE, debido a la coma, que invariablemente ha de correr los lugares que le corresponden:

$$\begin{array}{r}
 0'2^3 \quad 0'2 \quad \text{una cifra decimal} \\
 \times 0'2 \quad + \text{una cifra decimal} \\
 \hline
 0'04 \quad \text{dos cifras decimales} \\
 \times 0'2 \quad + \text{una cifra decimal} \\
 \hline
 0'008 \quad \text{tres cifras decimales}
 \end{array}$$

Como ve, $0'2$ es mayor que $0'008$.

RADICACION

Cuando se intente radicar un decimal mixto (formado por parte entera y parte decimal) deberá colocarse de igual forma que para la radicación de números enteros. Pero al dividir las cifras del radicando en grupos de a dos, se tendrá en cuenta que, mientras los enteros se dividen de dos en dos *desde la coma hacia la izquierda*, los decimales se dividen también de dos en dos *desde la coma hacia la derecha*.

$$\sqrt{5.34.56.67'45.37.30}$$

La radicación se efectuará normalmente. Pero al operar con el grupo 45, primero de los decimales, debe colocarse la coma en la raíz buscada. Luego seguimos radicando como si las comas no existieran.

Vea un ejemplo:

Hemos llegado al grupo 35, primero de los decimales. En la raíz se coloca la coma, y se puede proseguir. Observe que al último grupo de los decimales, formado solamente por el 7, le hemos añadido un 0, a fin de completar el grupo.

$ \begin{array}{r} \sqrt{3.46.57'35.62.70} \\ -1 \\ \hline 24.6 \\ -224 \\ \hline 225.7 \\ -2196 \\ \hline 613.5 \\ -3721 \\ \hline 24146.2 \\ -223356 \\ \hline 181067.0 \\ -1489296 \\ \hline 321374 \end{array} $	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">186'164</div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div> 24 : 2 = 9 29 × 9 = 261 28 × 8 = 224 <hr/> 225 : 36 = 6 366 × 6 = 2196 <hr/> 613 : 372 = 1 3721 × 1 = 3721 <hr/> 24146 : 3722 = 6 37226 × 6 = 223356 <hr/> 181067 : 37232 = 4 372324 × 4 = 1489296 </div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 10px;"> </div> </div> </div>
--	--

Podríamos encontrar más cifras de la raíz, a base de colocar grupos formados por dos ceros (00.00.00) detrás del 70. Pero es suficiente con los tres decimales hallados.

Si desea extraer la raíz cuadrada de un decimal puro (sin enteros), proceda como en el caso anterior, prescindiendo por completo del cero. Este se coloca directamente en la raíz, seguido de la coma:

$$\sqrt{0'24.36} \quad 0'$$

Luego proceda como en una extracción normal:

$\sqrt{0'24.36}$ $\underline{-16}$ 83.6 $\underline{-441}$ 395	$0'49$ <hr/> $4 \times 4 = 16$ <hr/> $83 : 4 = 9$ $49 \times 9 = 441$
--	--

PROBLEMAS

¿Qué se entiende por problema? Hasta ahora hemos venido estudiando las cantidades como entes particulares, sin relación alguna entre sí, salvo las de sus números. Pero estas cantidades sólo las encontramos en los ejemplos de aritmética, puesto que el número 567, por ejemplo, sólo nos indica que tenemos una cantidad con quinientas sesenta y siete unidades, y eso es todo. En la vida normal no suelen encontrarse las cantidades como cosas inexpressivas, sino que siempre se relacionan con algún ser, con algo tangible o comprensible. Y así, detrás del número que expresa la cantidad, va siempre otro nombre que nos indica la unidad tangible de dicha cantidad. Así podremos hallar la expresión 567 ptas., 567 ohmios, 567 metros, etc.

Estas cantidades tangibles, denominadas *concretas*, suelen tener muchas relaciones entre sí, dependiendo las unas de otras. De esta forma, conociendo la relación y varias unidades concretas, podemos hallar la que nos interesa, igual como hacíamos con los números.

Al plantearse una de estas relaciones, en las que una de las cantidades es desconocida, nos hallamos ante un *problema*. Por tanto, PROBLEMA ES EL PLANTEO DE UNA SERIE DE RELACIONES ENTRE CANTIDADES CONCRETAS A FIN DE HALLAR OTRA CANTIDAD QUE NOS ES DESCONOCIDA.

En la resolución de los problemas tienen aplicación todas las operaciones estudiadas con los números. Vamos a ver a continuación la forma de operar con las cantidades concretas, ante problemas que se solucionan únicamente con las operaciones aritméticas.

EJEMPLOS

He adquirido 120 resistencias y gracias a esta compra he podido servir un resto de pedido de 100 resistencias. Después de entregar estas 100 resistencias, me han quedado en existencia 65. ¿Cuántas resistencias tenía antes de comprar las 120?

SOLUCIÓN:

Es evidente que si de las 120 resistencias que compro sirvo 100, me quedarán $120 - 100 = 20$ resistencias.

Si no tuviese otras resistencias que las compradas, tendría en existencia las 20 que me sobran, pero resulta que, al contar las resistencias que poseo, alcanzo la cifra de 65. En esta cantidad están incluidas las 20 resistencias sobrantes, *más* las resistencias que ya tenía. Por lo tanto, las que tenía antes de la compra eran:

$$65 - 20 = 45 \text{ RESISTENCIAS}$$

Se han cambiado 40 docenas de bases de enchufe a 4 ptas. cada base por hembrillas de a 20 ptas. la docena. ¿Cuántas hembrillas se habrán recibido?

SOLUCIÓN:

Tratándose de un cambio de género, el valor de lo recibido deberá ser igual al valor de lo entregado. Veamos, pues, cuál es este valor.

Precio de una docena de bases de enchufe:

$$12 \times 4 = 48 \text{ ptas.}$$

Precio de las 40 docenas que entregamos para el cambio:

$$48 \times 40 = 1.920 \text{ ptas.}$$

Luego deberán entregar a cambio de los enchufes un número de hembrillas cuyo valor total sea de 1.920 ptas. Cada 12 hembrillas valen 20 ptas. Luego con 1.920 ptas. podremos adquirir:

$$1.920 : 20 = 96 \text{ docenas}$$

$$96 \times 12 = 1.152 \text{ HEMBRILLAS}$$

Cierto empresario se comprometió a instalar una línea eléctrica entre dos poblaciones por un presupuesto total de 245.000 ptas. Pero el contrato quedó sin efecto cuando se llevaban contruidos los 5/9 de toda la línea. Deseamos saber cuánto debe percibir el empresario y cuál era la distancia cubierta sabiendo que se habían presupuestado 100 ptas. por cada metro de tendido.

SOLUCIÓN:

La distancia que separa ambos pueblos es:

$$245.000 : 100 = 2.450 \text{ m}$$

De esta distancia sólo se han cubierto sus 5/9 partes, que representan en metros:

$$2.450 \times \frac{5}{9} = \frac{2.450 \times 5}{9} = \frac{12.250}{9} = 1.361'111 \text{ m}$$

Siendo de 100 ptas. el valor de cada metro de línea, el empresario deberá percibir:

$$1.361'111 \times 100 = 136.111 \text{ ptas.}$$

Cierto depósito se llena en 9 horas gracias al agua que mana de un grifo. Pero en este mismo depósito se ha producido una grieta capaz de vaciarlo

en 12 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el mencionado depósito mientras exista la avería?

SOLUCIÓN:

Si normalmente el depósito se llena en 9 horas, en una hora, se llenará $\frac{1}{9}$ de depósito.

Por otra parte sabemos que se vaciaría en 12 horas, lo que por cada hora significa la pérdida de $\frac{1}{12}$ de la capacidad total del depósito.

La diferencia entre la ganancia y la pérdida de líquido será la cantidad de depósito que se llena por cada hora:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{12}{108} - \frac{9}{108} = \frac{3}{108} = \frac{1}{36} \text{ de depósito}$$

En una hora, pues, se llena $\frac{1}{36}$ de la capacidad total que será los $\frac{36}{36}$. Luego, para llenar estos $\frac{36}{36}$, se tardará:

$$\frac{36}{36} : \frac{1}{36} = \frac{36 \times 36}{36} = 36 \text{ HORAS}$$

De cada 3 kg de harina de trigo se obtienen 4 kg de pan. ¿Qué beneficio obtendrá un panadero que habiendo comprado 60 sacos de harina de 325 kilogramos cada uno a razón de 587'5 ptas. los 100 kg fabrica panes de 2 kg vendiéndolos a 9'5 ptas. cada pan?

SOLUCIÓN:

Cantidad de kg. de harina que ha comprado el panadero:

$$325 \times 60 = 19.500 \text{ kg}$$

Precio de 1 kg de harina:

$$587'5 : 100 = 5'875 \text{ ptas.}$$

Precio total de la harina:

$$19.500 \times 5'87 = 114.465 \text{ ptas.}$$

Cantidad de pan que se puede fabricar:

Si por cada 3 kg de harina obtenemos 4 kg de pan, con 19.500 kilogramos de harina obtendremos:

$$19.500 : 3 = 6.500 \text{ veces que obtendremos 4 kg de pan}$$

Luego: $6.500 \times 4 = 26.000$ kg de pan, que al fabricarse en forma de panes de 2 kg. serán:

$$26.000 : 2 = 13.000 \text{ panes}$$

Vendiendo a 9'5 ptas. cada pan, se obtendrá una venta total de:

$$13.000 \times 9'5 = 123.500 \text{ ptas.}$$

El beneficio que proporciona el pan fabricado es de:

$$123.500 - 114.465 = 9.035 \text{ ptas.}$$

Los 2.025 hombres que forman un cuerpo de ejército se colocan en filas de igual número de hombres, de modo que todas juntas formen un cuadrado perfecto. ¿Cuántos hombres hay en cada fila?

SOLUCIÓN :

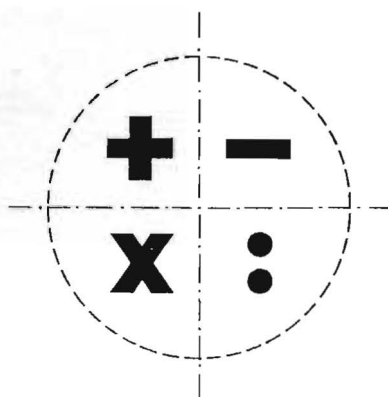
Puesto que la formación es un cuadrado perfecto, habrá tantos hombres en el sentido de lo ancho como en el sentido de lo largo. Digamos, por ejemplo, que en cada lado del cuadrado contamos 4 hombres. En este caso, el total serían cuatro filas de 4 hombres, o sea $4 \times 4 = 16$ hombres, o bien $4^2 = 16$ hombres. Si fuesen 8 los hombres de cada fila, tendríamos un total de 8 filas de 8 hombres, o sea $8^2 = 64$ hombres.

Digamos ahora que el número de hombres de cada fila es n . Según eso, será $n^2 = 2.025$ hombres, de donde deducimos que :

$$n = \sqrt{2025} = 45 \text{ HOMBRES EN CADA FILA}$$

MATEMATICAS

Regla de tres
Números aproximados
Problemas aritméticos



LECCION Nº 4

ARITMETICA

lección cuarta

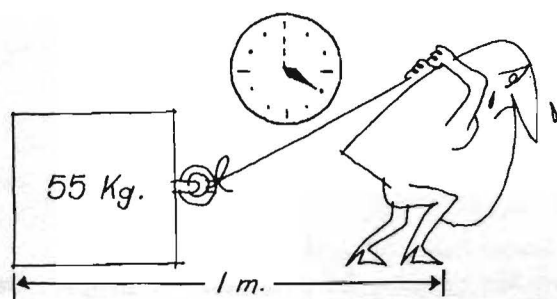
Regla de tres · Regla de tres simple · Regla de tres compuesta
Tanto por ciento · Números aproximados · Problemas aritméticos.

REGLA DE TRES

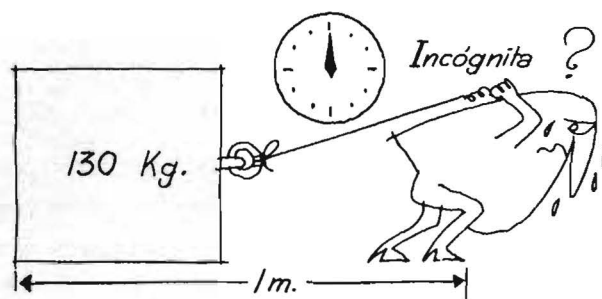
Entre los problemas que pueden resolverse aplicando los cálculos aritméticos son de especial interés los denominados de regla de tres, por ser tres precisamente las cantidades conocidas y buscarse una cuarta mediante apropiadas relaciones entre aquéllas.

Dos de las tres cantidades conocidas nos dan la relación inicial y principal, de la que podremos deducir el valor de la incógnita. A estas dos cantidades se les denomina ANTECEDENTE. La tercera cantidad y la incógnita forman otra relación denominada CONSECUENTE.

La regla de tres se divide a su vez en regla de tres SIMPLE y COMPUESTA, según que el número de relaciones precisas para hallar la incógnita sean dos o más.



Antecedente: para llevar 55 Kg a
1 m necesito 20 segundos.



Consecuente: para llevar 130 Kg a
1 m ¿Cuánto tiempo necesito?

REGLA DE TRES SIMPLE

En la regla de tres simple el número de relaciones precisas son sólo dos: la que nos indica el antecedente de que disponemos para hallar la solución y una de las dos cantidades de la consecuencia final.

Así, por ejemplo, si conocemos que 1 dm³ de agua pesa 1 Kg y deseamos saber cuánto pesan 6 dm³, estableceremos inmediatamente las dos relaciones precisas. Como antecedente tenemos el peso de 1 dm³, por lo que podemos decir:

Si un dm³ de agua pesa 1 Kg, seis dm³ pesará seis veces más.

De la anterior expresión, partiendo de la relación existente entre el volumen y el peso del agua, extraemos la consecuencia de que un volumen mayor ha de tener también un peso mayor. Y como a su vez la relación en el consecuente ha de ser igual que la existente en el antecedente, para que el resultado sea válido, deduciremos por lógica que a seis veces más volumen corresponderán seis veces más de peso.

Las anteriores relaciones tienen su expresión aritmética, cómo no. Para ello indicaremos el antecedente colocando sobre una misma horizontal los dos valores que lo forman; y debajo de cada uno de ellos los correspondientes del consecuente.

Antecedente	↓	1 dm ³ pesa	↓	1 Kg
Consecuente	↓	6 dm ³ pesarán	↓	X Kg

Observe cómo debajo de las medidas de volumen se han indicado también las de volumen, y debajo de las de peso las correspondientes al peso. Esta correspondencia se ha de mantener siempre, colocando las cantidades homogéneas en una misma vertical.

Establecidos ya antecedente y consecuente, se pasa a buscar la relación existente entre ellos. En el ejemplo que analizamos, observamos que a *más* volumen forzosamente corresponde *más* peso. En este caso, la relación existente es DIRECTA, ya que a MÁS corresponde MÁS. (También sería directa si a MENOS correspondiera MENOS.)

Para expresar esta relación directa entre antecedente y consecuente, la anotaremos debajo de las relaciones establecidas, de esta forma:

1 dm ³	pesa	1 Kg
6 dm ³	pesarán	X Kg
1 : 6	::	1 : X

Esta última expresión se lee:

UNO ES A SEIS COMO UNO ES A EQUIS.

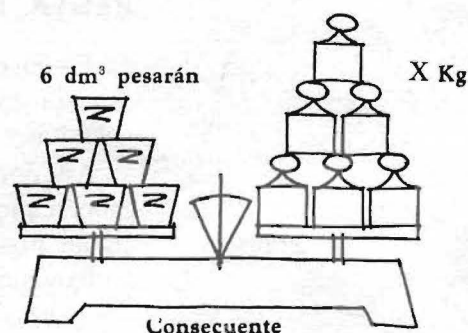
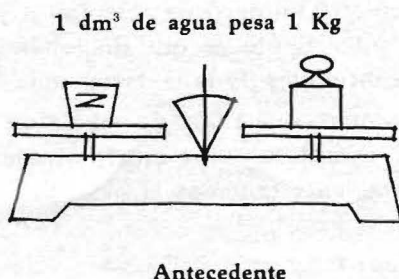
La primera y última de las cantidades anotadas constituyen los *extremos*; las dos intermedias son los *medios*. La solución del problema queda resumida en la siguiente regla:

EL PRODUCTO DE LOS MEDIOS ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS.

O sea que:

$$6 \times 1 = 1 \times X$$

Esta regla de tres es directa. A más agua más peso.



Y pasando el extremo conocido al primer término de esta igualdad, tendremos que:

$$X = \frac{6 \times 1}{1}$$

De esta última igualdad deducimos que la incógnita es igual al producto de los medios partido por el otro extremo conocido.

$$X = \frac{6 \times 1}{1} = 6 \text{ Kg}$$

Veamos otro ejemplo, por medio del cual podamos reafirmar las ideas expresadas en los párrafos anteriores. Dos hombres tiran a la vez de un peso y lo arrastran seis metros. Si fuesen tres los hombres, ¿cuántos metros lograrían arrastrarlo?

Primero hallaremos la relación principal o antecedente. Éste es el de que dos hombres arrastran un peso seis metros. Ya tenemos una relación: 2 hombres 6 metros.

Y por otro lado, ¿cuál es la consecuencia que deseamos sacar de esta relación? En la pregunta del problema se nos solicita el espacio hasta donde lograrían arrastrarlo si en lugar de dos fueran tres los hombres. Consecuencia: 3 hombres X metros.

Aritméticamente:

2 hombres	6 metros
3 hombres	X metros

Más hombres producen *más* fuerza. La relación es directa y por lo tanto anotaremos:

2 hombres	6 metros
3 hombres	X metros
<hr/>	
2 : 3 :: 6 : X	

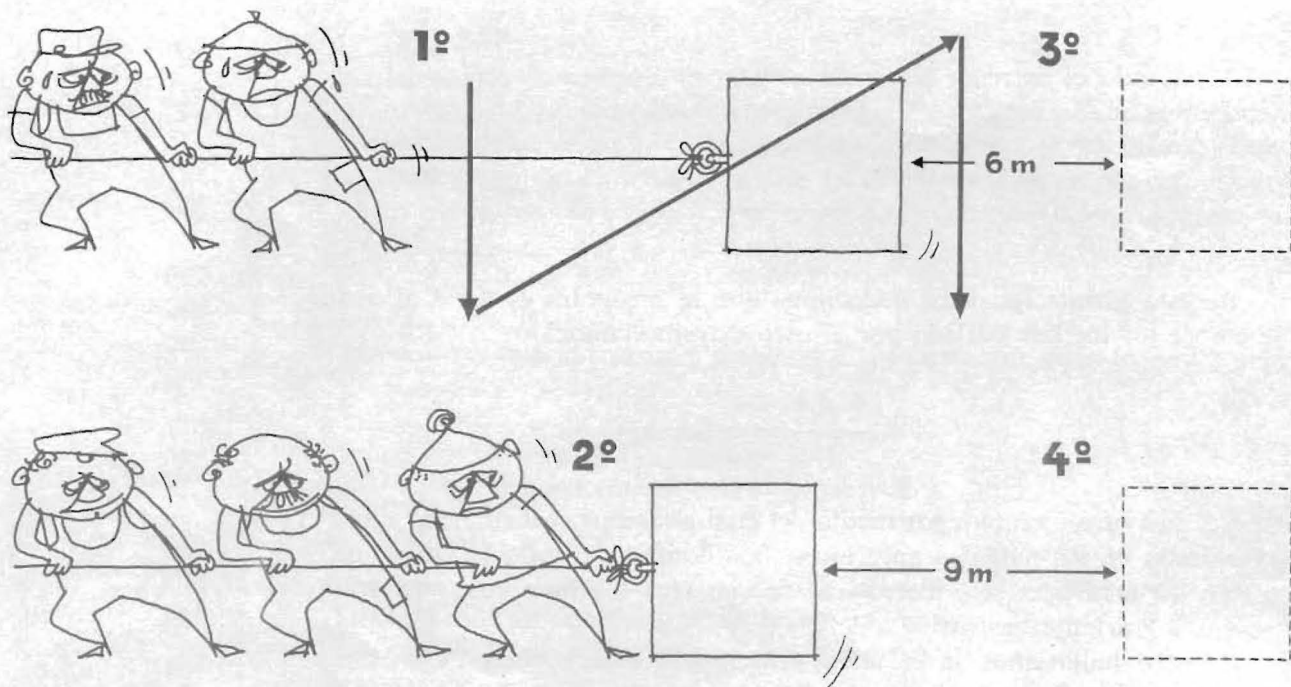
Y ahora:

$$X = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

Solución: 9 metros.

Para no incurrir en error alguno, cuando coloque los términos de las dos relaciones en su correspondiente lugar de la RAZÓN (la expresión que escribimos debajo de la raya horizontal) tenga siempre presente que, cuando las relaciones son directas, el orden en la razón empieza por el primer término del antecedente; le sigue el primero del consecuente, luego el segundo término del antecedente y finalmente el dato desconocido.

El conjunto forma una N al revés:



Cuando las relaciones son directas el orden de la razón sigue los trazos de una N al revés.

2 hombres	6 metros
3 hombres	X metros

2 : 3 :: 6 : X

1.º	↓	↘	↓	3.º
2.º	↓	↗	↓	4.º

1.º : 2.º :: 3.º : 4.º

Recuerde esta
N al revés.

CUANDO LA RELACION ES INVERSA

Recuerde siempre esta N al revés cuando le salga una regla de tres con relaciones directas.

Ahora bien; cuando a un MÁS le corresponde un MENOS, nos hallamos ante las llamadas reglas de tres INVERSAS o INDIRECTAS. Su resolución no obstante es idéntica a la de las directas, cambiando únicamente el orden de colocación de los términos en la razón. Mientras en las directas el orden forma una N al revés, en las indirectas dicho orden forma una U, también el revés.

Si un automóvil, a la velocidad de 40 Km/hora, tarda media hora en llegar a su destino, ¿cuánto tardaría si fuera a 60 Km/hora?

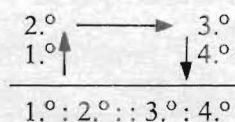
Al llevar una velocidad mayor, recorrerá el espacio que le separa de su destino en menos tiempo. Por tanto, a MÁS velocidad, MENOS tiempo. Procediendo de igual forma que en las directas, anotaremos primero el antecedente y el consecuente.

40 Km/hora	30 minutos
60 Km/hora	X minutos

60 : 40 :: 30 : X

Observe cómo al anotar la razón he empezado por el primer término del consecuente, siguiendo con el primero del antecedente y con el se-

gundo del antecedente, y como último el segundo del consecuente. El conjunto forma una U invertida tal como le he citado:



Recuerde esta
U al revés.

La solución del problema sigue la misma regla que en las reglas de tres directas, o sea: el producto de los medios es igual al producto de los extremos, y por tanto la incógnita es igual al producto de los medios partido por el extremo conocido.

$$X = \frac{40 \times 30}{60} = 20 \text{ minutos}$$

Al resolver reglas de tres simples tiene gran importancia no equivocarse al anotar la razón, puesto que media una diferencia enorme entre una relación directa y una inversa.

REGLA DE TRES COMPUESTA

Cuando en una regla de tres concurren varias relaciones, cada una de las cuales influye en el resultado, tendremos otras tantas reglas de tres simples, directas o inversas, jugando con la misma incógnita. En este caso no es necesario ir anotando tantas incógnitas como relaciones haya, sino que bastará con ir anotando todas las cantidades homogéneas de los distintos antecedentes y consecuentes, formando un solo conjunto con varios términos.

Examinemos un ejemplo. Sabiendo que la resistividad del cobre es de 0'0158 ohmios por metro de longitud y mm² de sección, se desea conocer la resistencia de un cable de cobre que mide 3 m de longitud y una sección de 0'7 mm².

Los datos que se nos dan como antecedentes son la resistividad del cobre, la unidad de longitud y la unidad de sección. Anotaremos todos estos datos en el primer renglón, teniendo en cuenta que la resistividad ha de ir en el último lugar, por ser la resistencia el dato desconocido del consecuente.

1 metro 1 mm² 0'0158 ohmios

A continuación colocaremos los datos del consecuente, debajo de las cantidades que les son homogéneas.

1 metro	1 mm ²	0'0158 ohmios
3 metros	0'7 mm ²	X ohmios

Ya tenemos anotadas todas las relaciones necesarias. Ahora debemos expresarlas en forma de razón, para poder efectuar las operaciones precisas. Pero observe que los términos, entre antecedentes y consecuente son seis, mientras que en la razón sólo tenemos cuatro: los dos extremos y los dos medios. ¿Cómo solucionar esta aparente anomalía? Senci-

llamente, escribiendo tantas razones como términos tenga el consecuente (sin contar la incógnita). En el ejemplo que desarrollamos, los términos conocidos del consecuente son dos; por lo tanto habrá dos razones:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ metro} & 1 \text{ mm}^2 & 0'0158 \text{ ohmios} \\ 3 \text{ metros} & 0'7 \text{ mm}^2 & X \text{ ohmios} \end{array}$$

A más longitud, más resistencia (directa):

$$1 : 3 :: 0'0158 : X$$

A menos sección, más resistencia (inversa):

$$0'7 : 1 :: 0'0158 : X$$

Una vez indicadas las dos razones, observe que los dos últimos términos son iguales en ambas. Por tanto, podremos abreviar la expresión de esta forma:

$$\begin{array}{ccc} 1 : 3 & & \\ & :: 0'0158 : X & \\ 0'7 : 1 & & \end{array}$$

Y la expresión completa será:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ metro} & 1 \text{ mm}^2 & 0'0158 \text{ ohmios} \\ 3 \text{ metros} & 0'7 \text{ mm}^2 & X \text{ ohmios} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 : 3 & & \\ & :: 0'0158 : X & \\ 0'7 : 1 & & \end{array}$$

La solución ahora sigue la regla general: incógnita igual a producto de los medios partido por el producto de los extremos conocidos:

$$X = \frac{3 \times 1 \times 0'0158}{1 \times 0'7} = \frac{0'0474}{0'7} = 0'0677 \text{ ohmios}$$

A estas reglas de tres se les denomina COMPUESTAS, por entrar varias simples en su composición. Como habrá podido observar, su resolución es fácil, por cuanto sigue las mismas líneas que las simples. No obstante no estará de más que veamos otro ejemplo, con más términos aún.

Doce obreros, trabajando dos días a razón de 8 horas cada día, levanta un muro de 3 metros de altura, por 0'5 metros de ancho, por 10 metros de largo. Se desea saber la longitud que podrían construir 16 obreros, en 4 días, trabajando 9 horas cada día y siendo el muro de sólo 2'5 metros de altura por 0'7 metros de ancho.

Anotemos primero el antecedente y el consecuente:

$$\begin{array}{ccccccc} 12 \text{ obreros} & 2 \text{ días} & 8 \text{ horas} & 3 \text{ metros} & 0'5 \text{ metros} & 10 \text{ metros} \\ 16 \text{ obreros} & 4 \text{ días} & 9 \text{ horas} & 2'5 \text{ metros} & 0'7 \text{ metros} & X \text{ metros} \end{array}$$

Como en el consecuente tenemos cinco términos conocidos, el número de razones será también cinco. Vayamos indicándolas debajo de las relaciones, atendiendo a si son directas o inversas con respecto al término de la incógnita:

12 obreros 2 días 8 horas 3 metros 0'5 metros 10 metros
 16 obreros 4 días 9 horas 2'5 metros 0'7 metros X metros

Más obreros, más metros (directa):

12:16

Más días, más metros (directa):

2:4

Más horas, más metros (directa):

8:9::10:X

Menos alto, más metros (inversa):

2'5:3

Más ancho, menos metros (inversa):

0'7:0'5

12:16

2:4

8:9::10:X

Relaciones
directas

2'5:3

0'7:0'5

Relaciones
inversas

Basta colocar una
sola vez el segun-
do término de la
razón.

Observe cómo, colocando, basta indicar una sola vez el segundo término de la razón.

Halladas ya las razones, podemos proceder a la resolución del problema:

$$X = \frac{16 \times 4 \times 9 \times 3 \times 0'5 \times 10}{12 \times 2 \times 8 \times 2'5 \times 0'7} = 25'710 \text{ metros}$$

¡Y ya está! A pesar de la complejidad de datos que figuran en el problema, el planteo del mismo se reduce a un simple quebrado, cuyo numerador es el producto de todos los medios y el denominador el producto de todos los extremos. No debe engañarle, no obstante, esta aparente facilidad, puesto que debe tenerse muy presente, que una falsa apreciación en la relación entre dos términos homogéneos cualesquiera y los dos términos de la incógnita, o colocar como relación directa lo que sea inversa, es suficiente para introducir un error en el resultado que luego es difícil localizar.

TANTO POR CIENTO

Cuando al efectuar una venta se obtiene un beneficio sobre el coste real de lo vendido, se puede indicar dicho beneficio de dos formas distintas: O bien se toman las ganancias sin tener en cuenta lo que ha costado lo vendido, o bien se relacionan costo y ganancia. Por ejemplo, se vende por 750 pesetas un material que ha costado 500. La ganancia total será la diferencia entre el coste, 500 pesetas, y la venta, 750 pesetas.

$$750 - 500 = 250 \text{ pesetas}$$

La ganancia, desde luego, ha sido 250 pesetas. Pero si deseamos saber lo que representa esta ganancia teniendo en cuenta el precio de costo, no nos basta conocer la total, sino que deberá tomarse un patrón con el que efectuar la relación de una forma fácil y comprensible. De esta necesidad salió la idea del TANTO POR CIENTO, que no es otra cosa que relacionar ciertas cantidades con el patrón 100, de forma que para indicar una relación de 1 es a 1, o sea, que a cada unidad le corresponde otra unidad, en el tanto por ciento, a cien unidades deberán corresponder cien unidades. Aquí también se parte de las relaciones existentes en las reglas de tres, y en el ejemplo que hemos tomado diríamos:

Si en 500 pesetas hemos ganado 250 pesetas
en 100 pesetas hemos ganado X pesetas

$$500 : 100 :: 250 : X$$

$$X = \frac{100 \times 250}{500} = 50 \text{ pesetas}$$

O sea que los beneficios representan un 50 por 100 del precio de coste. Dicho de otra forma, por cada 100 pesetas de coste se han ganado otras 50.

El signo aritmético del tanto por ciento es %, colocado detrás de la cantidad que corresponda. (En el ejemplo anterior, la ganancia es del 50 % sobre el coste.)

La utilidad del tanto por ciento no se limita al comercio, sino que lo encontramos también en la mecánica, en la electricidad, en la construcción y en general en todas las ramas donde entra el cálculo. Así, por ejemplo, en la electricidad nos encontramos con la expresión $125 \text{ V} \pm 10 \%$, que no significa otra cosa sino que la variación de la tensión puede estar comprendida entre $125 + 12.5 \text{ V}$ y $125 - 12.5 \text{ V}$, puesto que el 10 % de 125 es 12.5. También en radioelectrónica puede leerse $5000 \text{ pF} \pm 10 \%$, indicando que la capacidad puede variar entre 4500 y 5500 pF, puesto que el 10 % de 5000 son 500, que deben restarse o sumarse a la capacidad nominal. Resumiendo, siempre que encuentre la anotación X %, recuerde que expresa que a cada cien unidades le corresponden X.

Para hallar un tanto por ciento determinado de alguna cantidad basta con dividir esta cantidad por 100 y multiplicarla por el tanto dado. Por ejemplo, el 15 % de 375 serán:

$$\begin{aligned} 375 : 100 &= 3'75 \\ 3'75 \times 15 &= 56'25 \end{aligned}$$

Si, por lo contrario, deseamos saber el tanto por ciento que una cantidad representada con respecto a otra, se multiplica la primera por cien y se divide por la segunda. Por ejemplo, la cantidad 75, ¿qué tanto por ciento representa de 600?

$$\begin{aligned} 75 \times 100 &= 7500 \\ 7500 : 600 &= 12'5 \% \end{aligned}$$

NUMEROS APROXIMADOS

Hasta aquí hemos tratado con números enteros y con decimales cuyo número de cifras es limitado. Pero no siempre son así las cantidades que obtenemos al efectuar una operación aritmética; buen ejemplo de ello constituye el llamado número pi, tan usado en geometría, cuyo valor completo es 3'141592653589793... Hallar los valores de la circunferencia o el área del círculo, en los que interviene el número pi, sería algo así como intentar descifrar un jeroglífico egipcio.

Números como el citado salen muy a menudo. Intente, por ejemplo, efectuar una división inexacta:

$$2357 : 37 = 63'702702702...$$

Lógicamente, en la práctica no se concibe operar con tantos decimales, por la gran pérdida de tiempo que ello trae consigo y por la facilidad con que se podría incurrir en error al existir tantas cifras. En vista de ello, se recurre a la eliminación de buen número de esos decimales, operando sólo con dos, tres o cuatro decimales según la aproximación que se desee. Naturalmente, al eliminar cifras de cualquier cantidad se recae en una diferencia en el resultado; pero ésta resulta muy pequeña y puede despreciarse.

El escoger dos, tres o más decimales queda, la mayoría de las veces, a elección del operador. No obstante, veamos algunas reglas prácticas que nos facilitan esta labor, sin que el resultado salga con error muy apreciable.

CUANDO LA PRIMERA CIFRA DESPRECIADA ES 8 Ó 9 SE SUSTITUYEN POR UN 0, AUMENTANDO EN UNA UNIDAD LA CIFRA ANTERIOR.

$$3'141592653589793... = 3'1416$$

$$X \% \text{ de } n =$$

$$= \frac{n \times X}{100}$$

Para conocer el valor del % de una cantidad, se multiplica esta cantidad por el tanto y se divide por cien.

$$\% = \frac{X \times 100}{n}$$

Para saber qué % de n representa una cantidad x, se multiplica la segunda por cien y se divide por la primera.

Regla I

Regla II

CUANDO LA CIFRA DESPRECIADA ES 3, 4, 6 ó 7 SE SUSTITUYEN POR UN 5.

$$23'725647 = 23'725645 = 23'72565 = 23'7255$$

Regla III

CUANDO LA PRIMERA CIFRA DESPRECIADA ES 1 ó 2 SE SUPRIMEN SIN MÁS.

$$67'481 = 67'48$$

En el primer caso el error en que se incurre será por exceso, ya que hemos añadido una cierta cantidad a fin de suprimir los decimales:

$$\begin{array}{r} 3'141592653589793 \\ + 0'000007346410207 \\ \hline 3'141600000000000 \end{array}$$

Y como los ceros a la derecha de los decimales no tienen valor alguno, nos queda 3'1416.

En el segundo caso, será un error por defecto cuando la última cifra sea 3 ó 4, ya que ambas son inferiores a 5, y para eliminarlas deberemos sumarle la cantidad que les falte para llegar a él. Por el contrario, si la última cifra es 6 ó 7, el error entonces es por defecto, ya que el cinco que colocamos es inferior a las cifras suprimidas, lo que equivale a restar una cantidad.

$$\begin{array}{ll} 23'725647 = 23'725645 & \text{por defecto (7 5)} \\ 23'725647 = 23'72565 & \text{por exceso (4 5)} \end{array}$$

Si al suprimir las cifras decimales lo hacemos por defecto, el total que se obtendrá, efectuadas todas las operaciones en las que el número aproximado por defecto intervenga (directamente o a través de sus productos), será *inferior* al verdadero. Y si los decimales han sido aproximados por exceso, el total será *mayor* que el verdadero.

De lo anterior se deduce que en una serie de operaciones en las que intervengan decimales que hayan de ser aproximados, no es conveniente que todos los decimales sean aproximados por defecto o por exceso, sino que debe procurarse que haya de una y otra clase. Por ejemplo, el producto de $2'23 \times 2'28 = 5'0844$.

Aproximando los decimales según las reglas dadas:

$$2'25 \times 2'3 = 5'175$$

nos da un error en más de

$$5'175 - 5'0844 = 0'906$$

que equivale casi a una décima ($0'09 = 0'1$ aproximadamente).

Los dos decimales han sido aproximados por exceso, lo cual ha motivado que el error se acumulara hasta llegar a la cifra indicada. Pero aquí entra el análisis de los errores que se denominan PARCIALES y que son los constituidos por los de los decimales que se suprimen. Analicemos el ejemplo anterior:

Al aproximar los decimales hemos cometido un error parcial de:

$$\begin{array}{r} 2'25 - 2'23 = + 0'02 \\ 2'3 - 2'28 = + 0'02 \\ \hline 0'04 \end{array}$$

Pero si, en lugar de hacerlo así, aproximamos a uno por defecto y a otro por exceso, el error que cometemos será:

1.º Dejándolos en:

$$\begin{array}{r} 2'23 = 2'25 \\ 2'28 = 2'25 \\ 2'25 - 2'23 = + 0'02 \\ 2'25 - 2'28 = - 0'03 \\ \hline - 0'01 \end{array}$$

El error parcial es mucho menor, como puede apreciarse. Y al ser el error parcial menor, también la aproximación del resultado será más satisfactoria:

$$2'25 \times 2'25 = 5'0625$$

Observe que 5'0625 y 5'0844 ya están mucho más aproximados.

2.º Dejándolos en:

$$\begin{array}{r} 2'23 = 2'2 \\ 2'28 = 2'3 \end{array}$$

El error parcial será:

$$\begin{array}{r} 2'2 - 2'23 = - 0'03 \\ 2'3 - 2'28 = + 0'02 \\ \hline - 0'01 \end{array}$$

¡Igual que en el caso anterior! Sin efectuar aún la multiplicación, podemos asegurar que el resultado o producto de esta última aproximación será casi igual al anterior, puesto que el error parcial cometido es el mismo:

$$2'2 \times 2'3 = 5'06$$

Ya ha visto cómo, por medio del análisis de los errores parciales que se cometen con las cantidades a aproximar, se puede deducir qué clase de aproximación es la más conveniente para que el resultado no sufra

mucha alteración. Este análisis es siempre conveniente antes de proceder a la eliminación de decimales.

Cuando la cantidad en que deben suprimirse decimales proviene de una suma, resta o multiplicación, se ha de tener en cuenta la clase de aproximación predominante en sus términos, ya que el resultado de estas operaciones viene influido por aquéllas. Si se han suprimido más decimales por defecto que por exceso, el resultado está aproximado por defecto. En este caso, si en el producto hubiera demasiados decimales, no deben quitarse por defecto, sino por exceso, a fin de contrarrestar la influencia de los términos.

Aún existe otra particularidad que influye en la aproximación de los decimales. Cuando las cantidades que se analizan son datos de un problema, debe examinarse qué es preferible: que el resultado venga dado por exceso o por defecto.

Si por ejemplo se calcula la sección de un conductor, a través del cual ha de pasar una intensidad apreciable, tomaremos todos los datos aproximados por defecto, ya que de esta forma el resultado *será menor* que el verdadero; y si por esta sección menor puede circular la corriente sin peligro alguno, tanto más circulará por la sección verdadera, que es mayor.

Si, por lo contrario, deseamos conocer el peso de este conductor, para efectuar un cálculo aproximado de su costo, entonces tomaremos todos los datos aproximados por exceso, ya que de esta forma el peso que nos resulte *será mayor* que el verdadero, y a la hora de efectuar la compra nos resultará más barato de lo previsto.

Pese siempre el pro y el contra al efectuar una supresión de decimales. Para ello, piense siempre que una aproximación de todas las cantidades por *defecto* da un total *inferior* al verdadero, mientras que aproximándolas por *exceso* el total es *superior* al real. Por último, aproximándolas sucesivamente, unas por exceso y otras por defecto, el resultado será muy aproximado al real, en más o en menos, según que dominen los decimales suprimidos por exceso o por defecto.

PROBLEMAS - REGLA DE TRES

1.º Un determinado cable, cuya longitud es de 12 m, presenta una resistencia de 500 ohmios. Si se desea que esta resistencia sea sólo de 45 ohmios, ¿qué longitud deberá dársele al cable?

SOLUCION

Las dos cantidades homogéneas conocidas son las que nos indican la resistencia del cable, mientras la incógnita se refiere a su longitud. Por lo tanto, el primer término de antecedente y consecuente será la resistencia, y el segundo la longitud:

$$\begin{array}{rcl} 500 \text{ ohmios} & & 12 \text{ metros} \\ 45 \text{ ohmios} & & X \text{ metros} \\ \hline & & 500 : 45 :: 12 : X \end{array}$$

La relación es directa, puesto que a menos resistencia le corresponde menos longitud. Y por lo tanto:

$$X = \frac{12 \times 45}{500} = 1'08 \text{ metros}$$

2.º ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 1000 metros de longitud y 1'5 mm de diámetro?

SOLUCION

A simple vista parece que al problema le falten datos, puesto que sólo nos dan dos y sabemos que en una regla de tres deben conocerse como mínimo *tres*. No obstante, si bien no lo indican, los otros datos son conocidos, puesto que la resistencia específica del cobre viene dada en tablas. Ésta es de 0'0178 ohmios por metro y por mm² de sección. Observe cómo ahora las cantidades que conocemos son cinco. Aquí se desea hallar la resistencia, partiendo de la longitud y la sección. Ahora bien; la sección debe darse en mm² y en la pregunta viene dada sólo en milímetros. La primera operación será, pues, hallar la sección del cable o alambre:

$$\begin{aligned} \text{Sección} &= \text{radio}^2 \times \pi \\ \text{Radio} &= 1'5 : 2 = 0'75 \\ 0'75 \times 0'75 \times 3'1415 &= 1'767 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Y ahora

1 metro	1 mm ²	0'0178 ohmios
1000 metros	1'75 mm ²	X ohmios

A más metros, más resistencia

$$1 : 1.000$$

A más sección, menos resistencia :: 0'0178 : X

$$1'75 : 1$$

$$X = \frac{1000 \times 1 \times 0'0178}{1'75} = 10'17 \text{ ohmios} = 10'2 \text{ ohmios}$$

3.º Una vaca, atada a un árbol con una cuerda de 10 metros, tiene pasto para 30 días. ¿Qué longitud deberá tener la cuerda para que pueda pacer 40 días?

SOLUCION

La solución no es tan fácil como parece a simple vista. La longitud de la cuerda no está en relación directa con los días, puesto que la vaca

no come en línea recta, sino en todo el círculo que abarca la cuerda. Por tanto, es el círculo el que determina los días que podrá seguir comiendo. Y como el área del círculo varía según el cuadrado del radio, tendremos:

$$\begin{array}{r} 30 \text{ días} \qquad 10^2 \text{ m} \\ 40 \text{ días} \qquad X^2 \text{ m} \\ \hline 30 : 40 :: 10^2 : X^2 \\ \\ X^2 = \frac{40 \times 100}{30} = \frac{4.000}{30} = 133'33 \\ \\ X = \sqrt{133'33} = 11'5 \text{ METROS DE CUERDA} \end{array}$$

TANTO POR CIENTO

1.º Un individuo compra una mercancía en 350 pesetas y la vende por 412 pesetas. ¿Qué % ha ganado?

SOLUCION

La ganancia ha sido de

$$412 - 350 = 62 \text{ pesetas}$$

Por tanto, si en 350 pesetas ha ganado 62, en 100 pesetas habrá ganado una cantidad X. Resolviéndolo como una regla de tres, tendremos:

$$\begin{array}{r} 350 \text{ pesetas} \qquad 62 \text{ pesetas} \\ 100 \text{ pesetas} \qquad X \text{ pesetas} \\ \hline 350 : 100 :: 62 : X \end{array}$$

De lo que se deduce

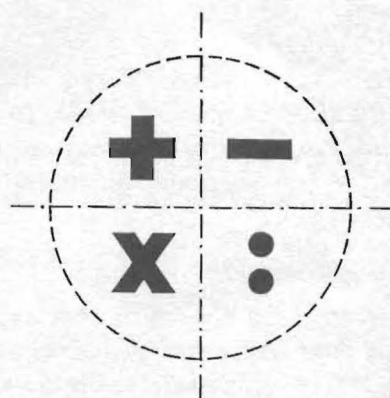
$$X = \frac{100 \times 62}{350} = 17'714 = 17'7 \%$$

MATEMATICAS

Algebra

Primeras definiciones

Suma, resta y multiplicación de expresiones algebraicas



LECCION N^o 5

MATEMATICAS

Lección quinta

Algebra: definición - Coeficiente y exponente - Expresión algebraica
Monomio y polinomio - Términos semejantes - Reducción de términos semejantes - Operaciones con expresiones algebraicas - Suma - Resta
Multiplicación - Monomio por monomio - Polinomio por monomio - Polinomio por polinomio - Casos particulares de la multiplicación de polinomios

DEFINICION

Algebra es la parte de las Matemáticas que tiene por objeto simplificar y generalizar las cuestiones que se refieren a los números. Para ello se sirve de letras que representan toda clase de cantidades. Con las primeras letras del abecedario (a, b, c, d...) se designan las cantidades que se conocen cuando se plantea un problema. Las últimas (...x, y, z) expresan las cantidades que se buscan.

Los signos empleados en álgebra para indicar las operaciones son los mismos que en aritmética, o sea:

$$+ \quad - \quad \times \quad : \quad \sqrt{\quad}$$

y se leen de la misma forma. El signo \times , que se indica también con un (\cdot) , se sobrentiende cuando los factores están representados por letras. Así, $a \times b \times c$ se escribe solamente abc .

COEFICIENTE Y EXPONENTE

Llámase coeficiente AL NÚMERO QUE SE COLOCA DELANTE DE UNA LETRA, O DE UN GRUPO DE LETRAS, Y QUE EXPRESA LAS VECES QUE ESTA LETRA, O ESTE GRUPO DE LETRAS, SE TOMAN COMO SUMANDOS.

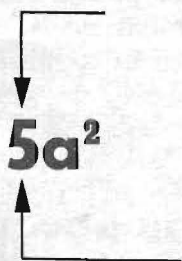
Así, por ejemplo, no anotaremos

$$a + a + a,$$

sino

$$3a$$

Coeficiente



Se coloca delante de una letra o grupo de letras.

El coeficiente 3 indica que la letra a debe tomarse tres veces como sumando; o, lo que es igual, que la letra a debe multiplicarse por 3. Recuerde que al referirnos a una letra sobrentendemos que la operación debe realizarse CON EL VALOR QUE PUEDA REPRESENTAR.



Si en lugar de ser una sola letra lo que se repite como sumando, es un grupo de ellas, como por ejemplo abc , el coeficiente se referirá AL PRODUCTO QUE REPRESENTAN ESTAS LETRAS. No olvide que abc significa $a \times b \times c$. Así, por ejemplo, $5abc$ expresa:

$$abc + abc + abc + abc + abc$$

Cuando encontramos una letra, o grupo de letras, sin coeficiente alguno se sobreentiende que lleva el coeficiente 1. Así:

$$a = 1a$$

$$abc = 1abc$$



Indica que el valor de a debe multiplicarse n veces.

Cuando el coeficiente antecede a una *expresión algebraica*, encerrada en un paréntesis, significa que toda la expresión se repite como sumando. Por ejemplo, en la expresión $2(a + b)$, para eliminar el paréntesis deberíamos anotar:

$$2(a + b) = (a + b) + (a + b)$$

$$(a + b) + (a + b) = a + b + a + b$$

$$a + b + a + b = 2a + 2b$$

Observe que cuando el coeficiente antecede a una expresión encerrada entre paréntesis PUEDE SUPRIMIRSE COLOCANDO EL CITADO COEFICIENTE A CADA UNA DE LAS LETRAS O GRUPOS SEPARADAS POR EL SIGNO $+$ O $-$.

Asimismo, SE LLAMA EXPONENTE AL NÚMERO O LETRA QUE SE COLOCA EN LA PARTE SUPERIOR DERECHA DE OTRA LETRA, EXPRESANDO LAS VECES QUE ÉSTA SE TOMA COMO FACTOR.

$$a^2 = a \times a$$

$$ab^2c = a \times b \times b \times c$$

$$a^n = a \times a \times a \dots a \times a \text{ n veces}$$

EXPRESION ALGEBRAICA

Una expresión algebraica es EL CONJUNTO DE NÚMEROS (COEFICIENTES O EXPONENTES) Y LETRAS RELACIONADAS POR LOS SIGNOS DE LAS DISTINTAS OPERACIONES. A cada letra o grupo de letras separadas de las demás con los signos $+$ o $-$ se les denomina TÉRMINOS DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA. La siguiente expresión

$$ab + 2c + 3ac - 5b + d$$

consta de cinco términos.

Observe que, por sistema, se suprimen los signos de multiplicar. Cuando entre dos letras o entre un número y una letra no hay signo, se sobreentiende que se trata de dos factores

$$\text{Así: } ab = a \times b; 2g = 2 \times g \dots, \text{ etc.}$$

$a b^2$
 $2 b x$
 $5 a^2 c$
 $3 x y$

Son monomios

MONOMIO Y POLINOMIO

Cuando la expresión algebraica consta de un solo término, se designa con el nombre de MONOMIO. Por lo contrario, las expresiones con dos o más términos se conocen por POLINOMIOS. Son casos particulares las expresiones con dos o tres términos solamente, a las que se denomina BINOMIOS Y TRINOMIOS respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} a^2bc \\ 2bc^3 \\ \sqrt{b^2c} \end{array} \right\} \text{son monomios}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + bcd \\ 3cd + ac \end{array} \right\} \text{son binomios}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3ac + 2x + 3cb - 4acd \\ 3c + cd + 3a - 6bd \end{array} \right\} \text{son polinomios}$$

Para distinguir a simple vista si una expresión es polinomio o monomio, se atiende a si en ella figura algún signo $+$ o $-$. Si no hay ninguno, la expresión es un monomio. Si hay un solo signo, es binomio; y si hay varios, polinomio.

TERMINOS SEMEJANTES

Al efectuar operaciones con las expresiones algebraicas, según veremos más adelante, puede ocurrir que algunos de los términos de los polinomios resultantes sean iguales o tengan las mismas letras con el mismo exponente. En este caso se dice que contiene términos SEMEJANTES. Así, por ejemplo, en la expresión

$$3bc + 2ab - 5bc + 3cd$$

existen dos términos semejantes (el primero y el tercero), por cuanto tienen las mismas letras afectadas por el mismo exponente (en este caso se sobreentiende que el exponente es 1). Asimismo, en esta otra expresión

$$2a^2b - bc^3 - bc^2 + 5bc^3$$

sólo hay, también, dos términos semejantes, el segundo y el cuarto, ya que, aunque el tercero tiene las mismas letras que aquéllos, el *exponente* de una de ellas no es el mismo que el de las otras.

OBSERVE QUE TANTO EL SIGNO (POSITIVO O NEGATIVO) COMO EL COEFICIENTE NO INFLUYEN EN LA SEMEJANZA.

REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES

Cuando se halle ante esta circunstancia, puede recurrir a lo que se denomina REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES, que consiste en formar un solo término con todos los que sean semejantes. Para ello se atiende al signo que los precede y al coeficiente que poseen. Recuerde que el

$$a + b + c$$

Trinomio

$$a b + c$$

Binomio

$$2c + p^3 -$$

$$-xy + c$$

Polinomio

$$\begin{array}{r} \boxed{4ax} + \\ + ay - \\ - \boxed{6ax} \end{array}$$

Son términos semejantes. Pueden reducirse a un solo término, con lo cual el trinomio se convertiría en un binomio.

$$ay - 2ax$$

Reducción de términos semejantes en el trinomio anterior. Sólo han variado los coeficientes. La parte literal no varía.

signo — significa siempre una resta. En los dos ejemplos precedentes, la reducción daría:

$$\begin{array}{r} 3bc + 2ab - 5bc + 3cd = 2ab - 5bc + 3cd \\ + 3bc \\ \hline 2ab - 2bc + 3cd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a^2b - bc^3 - bc^2 + 5bc^3 = 2a^2b - bc^3 - bc^2 \\ + 5bc^3 \\ \hline 2a^2b + 4bc^3 - bc^2 \end{array}$$

Observe que en la reducción de los términos semejantes SÓLO VARÍAN LOS COEFICIENTES, no la parte literal. El término resultante adopta el signo de aquel de los términos semejantes que tenga mayor coeficiente.

FORMULAS

Con el empleo de las expresiones algebraicas pueden cifrarse, *con carácter general*, propiedades de las cantidades que de otra forma exigirían una larga notación y un trabajo muy arduo. También permiten indicar los procedimientos que conducen a la resolución de problemas.

Por ejemplo, para expresar que el orden de los factores en la multiplicación no altera el producto podemos emplear una igualdad compuesta de dos monomios:

$$ab = ba$$

Esas cuatro letras encierran en sí una ley matemática que tiene validez para TODOS los números.

Otro ejemplo: sabemos que la longitud de la circunferencia es igual al valor π multiplicado por el duplo del radio (o sea, el diámetro). Expresado así, con palabras, es un poco largo. Pero observe la sencillez de su expresión como monomio: $2\pi r$.

Más sencillez resulta imposible. SE DENOMINA FÓRMULAS A TODAS LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS, QUE REPRESENTAN PROPIEDADES GENERALES O PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Todas las reglas y normas para las operaciones aritméticas tienen validez cuando se trata de operar con expresiones algebraicas.

SUMA

Podemos hallar dos casos: que los sumandos sean monomios, o que los sumandos sean polinomios.

En el primer caso, se encierran los monomios entre paréntesis, para indicar que son sumandos de una misma suma, y se escriben uno a continuación de otro. Una vez anotados todos, pueden suprimirse los paréntesis, atendiendo a si entre los monomios hay alguno que sea semejante a otro para proceder a su reducción. La suma o resultado

suele ser un polinomio. Por ejemplo, se desea sumar $4a^3x^2$, a^4bx^2 , $3ab$, $9b^2$. Los cuatro son monomios. Los dispondremos de esta forma.

$$(4a^3x^2) + (a^4bx^2) + (3ab) + (9b^2) = 4a^3x^2 + a^4bx^2 + 3ab + 9b^2$$

La suma, efectivamente, es un polinomio, compuesto de cuatro términos en el ejemplo precedente. O sea, TANTOS TÉRMINOS COMO MONOMIOS TENÍAMOS COMO SUMANDOS, puesto que no ha habido reducción posible por no existir ningún término semejante.

En el segundo caso (suma de polinomios) y en un tercer caso intermedio (suma de monomios con polinomios), el proceso de resolución es idéntico. Se encierran entre paréntesis los diversos sumandos y se disponen luego uno detrás de otro; a continuación se procede a la supresión de los paréntesis y a la reducción de los términos semejantes, si los hay. Veamos un ejemplo:

Sumar

$$(2ab + 3ca + 6abc) + (-5ab + 2bc - 5abc) + (3ab - 2bc - 3ca)$$

$$\text{Será: } 2ab + 3ca + 6abc - 5ab + 2bc - 5abc + 3ab - 2bc - 3ca.$$

El conjunto es muy largo. Como se aprecia a simple vista que existen términos semejantes, los colocaremos uno debajo de otro, procurando que los términos semejantes coincidan entre sí. Tenga en cuenta que el orden de los términos no altera el valor de un polinomio.

$$\begin{array}{r} 2ab + 3ca + 6abc \\ -5ab \qquad -5abc + 2bc \\ 3ab - 3ca \qquad -2bc \\ \hline 0 \quad 0 \quad abc \quad 0 \end{array}$$

Observe cómo, gracias a la reducción de los términos semejantes, la suma de los nueve términos que componían los tres polinomios ha quedado reducida a un monomio, abc .

En cambio, para efectuar la suma de los polinomios $2x^2 + 5x$ y $x + 4$, los colocaremos uno detrás de otro, por cuanto sólo se aprecia un término semejante. Así:

$$(2x^2 + 5x) + (x + 4) = 2x^2 + 5x + x + 4 = 2x^2 + 6x + 4$$

RESTA

Lo mismo que en la suma, al efectuar una resta podemos encontrarlos con dos casos: sustracción de monomios y sustracción de polinomios.

Para efectuar la resta de dos monomios se procede de igual forma que en la suma; o sea, se encierran ambos monomios entre paréntesis, y se escriben uno a continuación de otro separados por el signo $-$. Pero PARA SUPRIMIR EL PARÉNTESIS DE AMBOS MONOMIOS, DEBEREMOS CAMBIAR LOS SIGNOS DEL SUSTRAYENDO (o sea, los signos del monomio que va precedido del signo $-$). Una vez cambiados los signos del sustraendo, pueden suprimirse los paréntesis y efectuar la reducción de los términos semejantes si los hay.

$$\begin{aligned} & (3bc) - \\ & (-4x) = \\ & = 3bc + \\ & \quad 4x \end{aligned}$$

Para restar los monomios $3a^2b$ y $4bc$, los encerraremos primero entre paréntesis ($3a^2b$), ($4bc$) y los colocaremos después uno a continuación de otro, separándolos por el signo $-$:

$$(3a^2b) - (4bc)$$

Y ahora, para suprimir el paréntesis, cambiaremos el signo del sustraendo, teniendo presente que SE SOBRENTIENDE QUE LLEVA EL SIGNO $+$ TODO MONOMIO QUE NO VAYA PRECEDIDO DE SIGNO ALGUNO $+$ o $-$. Por tanto, se sobrentiende que los monomios anteriores son $(+ 3a^2b) - (+ 4bc)$,

$$(3a^2b) - (4bc) = 3a^2b - 4bc$$

Observe cómo, efectivamente, el sustraendo $4bc$ ha cambiado de signo, pasando de $+ 4bc$ a $- 4bc$. Debe tener muy presente este cambio de signo, ya que, si bien en la suma el orden de los sumandos no altera el valor de la expresión resultante, no ocurre lo mismo en la resta. Si por un error tomásemos el monomio $3a^2b$ como sustraendo en lugar de minuendo, la expresión resultante sería

$$(4bc) - (3a^2b) = 4bc - 3a^2b,$$

que es muy distinta a la anterior.

Si en lugar de monomios nos interesa restar polinomios, vale también cuanto se ha dicho para los monomios. Supongamos los polinomios $5a - 3b + 4c$ y $6a - 5b - 3c$. Su resta será

$$(5a - 3b + 4c) - (6a - 5b - 3c)$$

Cambiando los signos del sustraendo

$$(5a - 3b + 4c) - (-6a + 5b + 3c)$$

y suprimiendo los paréntesis, obtendremos el polinomio

$$5a - 3b + 4c - 6a + 5b + 3c$$

Como existen varios términos semejantes, procederemos a su reducción:

$$5a - 6a - 3b + 5b + 4c + 3c = -a + 2b + 7c$$

Hemos colocado todos los términos semejantes uno a continuación de otro, ya que de esta forma resulta más fácil su reducción.

Observe que una vez cambiados los signos del sustraendo se procede como si se tratase de una suma. En efecto,

$$(5a - 3b + 4c) + (-6a + 5b + 3c) =$$

$$5a - 3b + 4c \quad - 6a + 5b + 3c$$

da el mismo resultado, después de reducidos los términos semejantes, que la resta anterior. Por lo tanto, cuando debamos efectuar una resta, cambiaremos los signos del sustraendo, y procederemos como si fuéramos a sumar.

Puede presentarse un tercer caso: que debamos sumar y restar al mismo tiempo, o sea, en una misma expresión. La solución consiste en

cambiar los signos a todos los términos de los monomios o polinomios que vayan precedidos del signo $-$. Por ejemplo:

$$(4a^3 - 2a^3b) - (2a^2b + 3a^3b) + (5a^3 + a^3b) - (2a^2b - 5a^3b)$$

Cambiando los signos de los polinomios precedidos del signo $-$, y sustituyendo luego éste por el signo de suma, tendremos:

$$(4a^3 - 2a^3b) + (-2a^2b - 3a^3b) + (5a^3 + a^3b) + (-2a^2b + 5a^3b)$$

Ahora pueden suprimirse todos los paréntesis, colocando cada término con el signo que le corresponde:

$$4a^3 - 2a^3b - 2a^2b - 3a^3b + 5a^3 + a^3b - 2a^2b + 5a^3b$$

Y como hay términos semejantes:

$$\underbrace{4a^3 + 5a^3} \quad \underbrace{-2a^3b - 3a^3b + a^3b + 5a^3b} \quad \underbrace{-2a^2b - 2a^2b} = \\ = 9a^3 + a^3b - 4a^2b$$

MULTIPLICACION

LA MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA ES LA OPERACIÓN POR MEDIO DE LA CUAL, DADAS DOS O MÁS EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SE HALLA OTRA CUYO VALOR NUMÉRICO ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS VALORES NUMÉRICOS DE LAS TOMADAS COMO FACTORES.

Se entiende por valor numérico de una expresión algebraica EL RESULTADO DE EFECTUAR LAS OPERACIONES INDICADAS SUSTITUYENDO TODAS LAS LETRAS POR LOS VALORES QUE LES PUEDAN CORRESPONDER. Por ejemplo, en el polinomio $ab + bc - ac$, el valor numérico, asignando a las letras los valores $a=2$, $b=8$, $c=6$, sería:

$$\begin{aligned} ab + bc - ac &= (2 \times 8) + (8 \times 6) - (2 \times 6) \\ ab + bc - ac &= 16 + 48 - 12 = 52 \end{aligned}$$

Tres son los casos principales que pueden presentarse en la práctica:

- a) Multiplicar dos monomios;
- b) Multiplicar un polinomio por un monomio;
- c) Multiplicar dos polinomios.

Pero antes de iniciarnos en el estudio de cada uno de los citados casos, veamos primero una regla de gran importancia para la perfecta resolución de la multiplicación algebraica. Tanto en la suma como en la resta, los términos de las expresiones algebraicas iban precedidos del signo $+$ o $-$, según fuera éste o aquél el signo que ostentaban en los sumandos. Sólo cambiaba el signo cuando, al efectuar la reducción de

$$\begin{aligned}
 + \times + &= + \\
 - \times - &= + \\
 + \times - &= - \\
 - \times + &= -
 \end{aligned}$$

Regla de los signos: Más por más, igual a más. Menos por menos, igual a más. Más por menos, igual a menos. Menos por más, igual a menos.

términos semejantes, éstos poseían signo distinto; se tomaba entonces el signo del término con mayor coeficiente. Pero lo que es válido para la suma y la resta, no lo es para la multiplicación. En esta operación debemos tener muy en cuenta los signos de que van precedidos los términos, para colocar el correspondiente al término resultante. Para ello tenga siempre presente la denominada REGLA DE LOS SIGNOS:

$$\begin{aligned}
 + \times + &= + & (\text{más por más, igual a más}) \\
 - \times - &= + & (\text{menos por menos, igual a más}) \\
 + \times - &= - & (\text{más por menos, igual a menos}) \\
 - \times + &= - & (\text{menos por más, igual a menos}).
 \end{aligned}$$

CUANDO LOS DOS TÉRMINOS QUE SE MULTIPLICAN VAN PRECEDIDOS DEL MISMO SIGNO (YA SEA $+$ O $-$), EL TÉRMINO RESULTANTE DEBE IR PRECEDIDO DEL SIGNO MÁS. POR EL CONTRARIO, SI LOS DOS TÉRMINOS VAN PRECEDIDOS DE DISTINTO SIGNO, EL TÉRMINO RESULTANTE LLEVARÁ EL MENOS.

Debe aprenderse de memoria la precedente regla por ser de gran importancia.

MONOMIO POR MONOMIO

Para multiplicar un monomio por otro monomio, DEBERÁN MULTIPLICARSE PRIMERO LOS COEFICIENTES. El producto será el coeficiente del nuevo monomio. Luego se anotarán todas las letras distintas que existan entre los dos monomios. Si alguna se repite en ambos, irá afectada de un exponente IGUAL A LA SUMA DE LOS EXPONENTES que tenga en cada uno de los monomios.

En la multiplicación $(8ab)(-5a^2y)$, el producto sería igual a multiplicar coeficientes y letras, puesto que las expresiones $8ab$ y $-5a^2y$ no significan otra cosa que $8 \times a \times b$ y $-5 \times a \times a \times y$; por tanto la multiplicación anterior podría escribirse de la siguiente forma

$$(8ab)(-5a^2y) = 8 \times a \times b \times -5 \times a \times a \times y$$

Y ahora, atendiendo a los coeficientes y a las letras iguales, el resultado completo será:

$$\begin{aligned}
 (8ab)(-5a^2y) &= 8 \times a \times b \times -5 \times a \times a \times y = \overset{(8 \times -5)}{-40} \times \\
 &\quad (a \times a \times a) \times b \times y = -40a^3by
 \end{aligned}$$

Observe cómo se ha respetado la regla de los signos.

Simplificando las operaciones, habríamos llegado al mismo resultado procediendo a la multiplicación directa de los coeficientes y a la anotación de las letras con sus correspondientes exponentes:

$$(8ab)(-5a^2y) = (8 \times -5) \overset{\text{Suma de exponentes}}{a^{1+2}}by = -40a^3by$$

Veamos aún otro ejemplo. Sea la multiplicación $(2ab)(3ac^3)$. Su resolución simplificada será:

$$(2ab)(3ac^3) = (2 \cdot 3) a^{1+1}bc^3 = 6a^2bc^3$$

Si en lugar de ser sólo dos se trata de multiplicar varios monomios entre sí, se procede a multiplicarlos de dos en dos, sustituyéndolos por su producto.

Sea la multiplicación $(5a^2b)(ab)(4ac^2)(5abd)$.

Efectuaremos primero la multiplicación de los dos primeros factores:

$$(5a^2b)(ab) = 5a^{2+1}b^{1+1} = 5a^3b^2$$

Sustituyéndolos por este producto hallado, queda la multiplicación en:

$$(5a^3b^2)(4ac^2)(5abd)$$

Buscaremos ahora el producto de los dos primeros factores que tenemos:

$$(5a^3b^2)(4ac^2) = (5 \cdot 4) a^{3+1}b^2c^2 = 20a^4b^2c^2$$

Con lo cual, ya sólo nos quedan dos factores:

$$(20a^4b^2c^2)(5abd) = (20 \cdot 5) a^{4+1}b^{2+1}c^2d = 100a^5b^3c^2d$$

Y por tanto:

$$(5a^2b)(ab)(4ac^2)(5abd) = 100a^5b^3c^2d$$

POLINOMIO POR MONOMIO

Habrá observado que todos los monomios de las operaciones anteriores estaban encerrados entre paréntesis, para indicar que cuanto encierra forma un solo factor. De igual forma, cuando entra un polinomio en la multiplicación, lo primero que debe efectuarse es encerrarlo entre paréntesis para prevenir posibles errores, dada la cantidad de términos que puede tener todo polinomio.

A pesar de la aparente complejidad que parece acarrear el multiplicar un polinomio, ésta se simplifica si se atiende a la circunstancia de que un polinomio no es más que un grupo de monomios unidos por los signos $+$ o $-$. Por tanto, la operación queda reducida a multiplicar el monomio tomado como multiplicador por cada uno de los monomios que componen el polinomio multiplicando, teniendo en cuenta la regla de los signos.

Así, en la multiplicación $(a^3 - b^2 - 2d^4)(-3a^2bc)$ podríamos tomar por separado los tres monomios a^3 , $-b^2$, $-2d^4$ y multiplicarlos por $-3a^2bc$.

$$\begin{aligned} (a^3)(-3a^2bc) &= -3a^5bc \\ (-b^2)(-3a^2bc) &= 3a^2b^3c \\ (-2d^4)(-3a^2bc) &= 6a^2bcd^4 \end{aligned}$$

$$3(a+b)$$

↑ El coeficiente afecta a los dos términos del binomio.

$$3(a+b) = 3a + 3b$$

Ambas expresiones tienen el mismo valor.

Y después escribir los productos en forma de polinomios, precedidos del signo correspondiente:

$$-3a^5bc + 3a^2b^3c + 6a^2bcd^4$$

Por tanto, el producto final de la multiplicación indicada es

$$(a^3 - b^2 - 2d^4)(-3a^2bc) = -3a^5bc + 3a^2b^3c + 6a^2bcd^4,$$

que es el resultado de multiplicar el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Caso muy frecuente es hallar expresiones como $7(ab + b)$, en las que el polinomio viene afectado por un coeficiente general. La expresión indica que el coeficiente es común a los términos que encierra el paréntesis. En el presente ejemplo, la expresión completa sería $7ab + 7b$, resultado de multiplicar el coeficiente por cada uno de los términos. Lo inverso también puede efectuarse, o sea, que si hallamos un polinomio en que los términos tienen el coeficiente o letras iguales, podemos sacarlo fuera del paréntesis, anotándolo como factor común. Tomemos el polinomio $15ax - 9bx^2 + 12x$, en el que no sólo tenemos una letra común a todos los términos, sino que además todos los coeficientes tienen un divisor común. Por tanto, podemos indicarlo de las dos formas siguientes:

$$15ax - 9bx^2 + 12x = 3x(5a - 3bx + 4)$$

puesto que la multiplicación indicada en esta última forma da el mismo producto que la primera. En resumen, siempre que se encuentre con una cifra o un monomio que anteceda a un polinomio encerrado entre paréntesis, debe recordar que significa que es un factor común a cada uno de los términos del polinomio.

POLINOMIO POR POLINOMIO

Según el párrafo anterior, la expresión $x(a + b)$ sería igual a $xa + xb$. Pero si sustituimos x por un valor tal como $c + d$, o sea, $x = c + d$, la expresión anterior se transforma en

$$xa + xb = (c + d)a + (c + d)b$$

Y efectuando estas últimas multiplicaciones:

$$xa + xb = (c + d)a + (c + d)b = ca + da + cb + db$$

y como $xa + xb = x(a + b)$, siendo $x = c + d$, será $xa + xb = (c + d)(a + b)$. Esta última expresión está compuesta por dos polinomios (binomios), y por tanto se trata de multiplicar un polinomio por otro polinomio. Del resultado obtenido

$$(c + d)(a + b) = ca + da + cb + db$$

obtenemos la regla de la multiplicación de polinomios por polinomios:

PARA MULTIPLICAR UN POLINOMIO POR OTRO POLINOMIO, SE MULTIPLICA CADA TÉRMINO DEL MULTIPLICADOR POR TODOS LOS DEL MULTIPLICANDO Y SE SUMAN LOS TÉRMINOS SEMEJANTES QUE RESULTEN.

$$ax + az$$

↑
Factor común

$$a(x + z)$$

La expresión anterior también puede escribirse considerando que a es coeficiente de x y de z .

Para facilitar la tarea se efectúa una operación preliminar denominada ORDENACIÓN DEL POLINOMIO con respecto a una letra, que no es otra cosa que variar el orden de los términos del polinomio de forma que los exponentes de la letra escogida vayan de mayor a menor. Por ejemplo, en el polinomio «desordenado» $3ab^2 - b^3 + a^3 - 3a^2b$, los exponentes de una cualquiera de las letras no guardan ningún orden. Pero si tomamos como letra base la a , por ejemplo, y colocamos los términos de forma que los exponentes de esta letra vayan de mayor a menor,

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

habremos ordenado el polinomio con respecto a la letra citada.

Esta ordenación de los polinomios es indispensable, puesto que, aunque sin ella también podríamos efectuar la multiplicación, la suma posterior de términos semejantes, o reducción, sería mucho más compleja, por cuanto el número de términos del polinomio resultante, antes de efectuar la citada reducción, es igual al producto del número de términos de cada polinomio. Así, en una multiplicación en la que los polinomios tuvieran cuatro y tres términos respectivamente, el polinomio resultante tendría $3 \times 4 = 12$ términos. Hallar los semejantes entre tal cantidad de términos, puede ser causa de errores. Por tanto, y dado lo sencillo que resulta ordenar los polinomios, siempre es conveniente efectuar esta operación.

Por ejemplo, para multiplicar $(a^2 + b^2 - 2ab)(a^2 - b^2 + 4ab)$, ordenaremos primero los dos polinomios con respecto a la letra a . Así:

$$(a^2 + b^2 - 2ab) = (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a^2 - b^2 + 4ab) = (a^2 + 4ab - b^2)$$

Ahora la multiplicación queda de esta forma

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + 4ab - b^2)$$

Cuando deba efectuarse una multiplicación en la que el multiplicador tenga más de dos términos, será conveniente disponer los polinomios de esta forma:

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + 4ab - b^2 \end{array}$$

para multiplicar como si se tratara de números, teniendo muy en cuenta los signos de los términos, y procurando colocar los términos semejantes uno debajo de otro. Se empieza a operar por el término del multiplicador situado más a la izquierda:

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + 4ab - b^2 \\ \hline a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \quad \text{.....} \quad \text{por } a^2 \\ + 4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3 \quad \text{.....} \quad \text{por } 4ab \\ - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \quad \text{.....} \quad \text{por } -b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b - 8a^2b^2 + 6ab^3 - b^4 \end{array}$$

Observe que se parece mucho a la multiplicación normal con cantidades o números, si bien aquí se separan los términos. Otra particula-

ridad es la de que, con esta disposición, sólo quedan cinco de los nueve términos ($3 \times 3 = 9$) de la resultante, habiéndose reducido los cuatro semejantes.

En esta otra multiplicación $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$, en la que vemos el polinomio ya ordenado, la reducción es aún más fuerte. Obsérvelo como cosa curiosa:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + xy + y^2 \\
 \underline{x - y} \\
 x^3 + x^2y + xy^2 \dots\dots\dots \text{por } x \\
 -x^2y - xy^2 - y^3 \dots\dots\dots \text{por } -y \\
 \hline
 x^3 \quad 0 \quad 0 \quad -y^3
 \end{array}$$

Hasta aquí, es posible que se haya preguntado para qué sirven tantas letras sin ton ni son. Anteriormente se ha indicado que por medio del álgebra podían cifrarse propiedades generales de los números, mediante las denominadas fórmulas. Del ejemplo anterior podemos extraer una de dichas propiedades. El producto obtenido de la multiplicación $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$ es $x^3 - y^3$. De ahí deducimos que LA DIFERENCIA ENTRE LOS CUBOS DE DOS NÚMEROS CUALESQUIERA ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE AMBOS NÚMEROS MÁS SU PRODUCTO $(x^2 + y^2 + xy)$, MULTIPLICADA POR LA DIFERENCIA ENTRE ELLOS $(x - y)$.

Le invito a que lo pruebe con dos números cualesquiera; verá cómo la fórmula es correcta. La inversa también es válida, y por tanto pueden sustituirse los dos polinomios factores por el binomio resultante, o viceversa. Esta reciprocidad debe tenerse muy en cuenta, ya que puede ayudarnos facilitando el cálculo.

CASOS PARTICULARES

Similares a la anterior expresión, podemos citar los llamados casos particulares de la multiplicación de polinomios. Los más usuales son:

Cuadrado de la suma de dos números:

$$(a + b)(a + b) \text{ ó } (a + b)^2$$

Cuadrado de la diferencia de dos números:

$$(a - b)(a - b) \text{ ó } (a - b)^2$$

Producto de la suma por la diferencia de dos números:

$$(a + b)(a - b)$$

Los analizaremos uno por uno, dada su particularidad.

1.º CUADRADO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS

$$(a + b)(a + b) \text{ ó } (a + b)^2$$

Efectuando la multiplicación así indicada, nos da

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}$$

Este caso se enuncia de esta forma:

EL CUADRADO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS ES IGUAL AL CUADRADO DEL PRIMERO (a^2) MÁS EL DUPLO DEL PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO ($2ab$), MÁS EL CUADRADO DEL SEGUNDO (b^2).

2.º CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS

$$(a - b)(a - b) \text{ ó } (a - b)^2$$

Operando como en el caso anterior:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

O sea: EL CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS ES IGUAL AL CUADRADO DEL PRIMERO (a^2), MENOS EL DUPLO DEL PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO ($-2ab$), MÁS EL CUADRADO DEL SEGUNDO (b^2).

3.º PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS

$$(a + b)(a - b)$$

Resolviendo la multiplicación tenemos:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad 0 \quad - b^2 \end{array}$$

Resultado que en forma de enunciado se expresa así:

EL PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS POR SU DIFERENCIA ES IGUAL A LA DIFERENCIA DE SUS CUADRADOS.

Los tres casos indicados tienen mucha aplicación en álgebra, por lo que debe esforzarse en recordarlos.

Otros dos productos, no tan empleados como los anteriores, se refieren a los casos

$$(a + b)^3 \text{ y } (a - b)^3$$

En el primero, podemos descomponer el binomio en otros dos binomios, $(a + b)^2(a + b)$, puesto que $(a + b)^3$, no es otra cosa que el producto $(a + b)(a + b)(a + b)$, del que podemos tomar los dos factores primeros como $(a + b)^2$. Y como $(a + b)^2$ es

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

podemos sustituir el binomio $(a + b)^2$ por este último polinomio, quedando

$$(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

La multiplicación dará

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

O sea, EL CUBO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS ES IGUAL AL CUBO DEL PRIMERO, MÁS EL TRIPLE DEL CUADRADO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO, MÁS EL TRIPLE DEL PRIMERO POR EL CUADRADO DEL SEGUNDO, MÁS EL CUBO DEL SEGUNDO.

Y si en lugar del cubo de la suma es el cubo de la diferencia de dos números, tendremos igualmente que

$$(a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b);$$

y por ser

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

también podemos indicar

$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b),$$

como en el caso anterior. Efectivamente, el producto

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - 2ab^2 + ab^2 \\ - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

Es decir: EL CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS ES IGUAL AL CUBO DEL PRIMERO, MENOS EL TRIPLE DEL CUADRADO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO, MÁS EL TRIPLE DEL PRIMERO POR EL CUADRADO DEL SEGUNDO, MENOS EL CUBO DEL SEGUNDO.

Observe que en ambos casos los monomios o términos componentes del polinomio resultante son los mismos, cambiando únicamente un par de signos. Otra observación importante: el exponente se refiere a la *suma* del binomio y no a cada uno de sus términos. Por tanto, no es lo mismo $(a^3 + b^3)$ que $(a + b)^3$. El primero es la *suma de potencias*, y el segundo la *potencia de una suma*. Sustituya los dos términos por números sencillos, efectúe las operaciones, y verá cómo dan resultados muy distintos. Por ejemplo, dando los valores $a = 4$ y $b = 3$, en el primer caso será:

$$(a^3 + b^3) = (4^3 + 3^3) = (64 + 27) = 91$$

y en el segundo

$$(a + b)^3 = (4 + 3)^3 = 7^3 = 343,$$

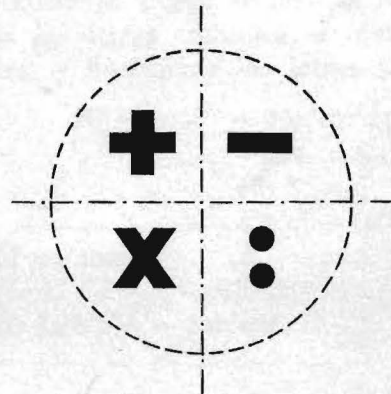
resultados que difieren mucho entre sí.

MATEMATICAS

Algebra (continuación)

División

**Fracciones algebraicas,
potenciación y radicación**



LECCION Nº 6

AFHA

MATEMATICAS

Lección sexta

Operaciones con expresiones algebraicas (división, fracciones algebraicas, potenciación y radicación)

DIVISION ALGEBRAICA

También son tres los casos que se presentan en la práctica, al dividir expresiones algebraicas; casos que son los mismos que en la multiplicación:

- Dividir dos monomios;
- Dividir un polinomio por un monomio;
- Dividir dos polinomios.

En la división tiene igualmente aplicación la denominada regla de los signos. Cuando dividendo y divisor tienen el mismo signo, el cociente será positivo (+). Si tienen signos distintos, el cociente será negativo (-).

$$\begin{array}{l} + : + = + \\ - : - = + \\ + : - = - \\ - : + = - \end{array}$$

Regla de los signos en la división:

Signos iguales, cociente positivo.

Signos distintos, cociente negativo.

a) Dividir dos monomios

Para dividir dos monomios se atenderá primero al signo que llevan ambos, para determinar el del cociente. Luego se dividen los coeficientes; a continuación se colocan las letras comunes al dividendo y al divisor, restando los exponentes, y finalmente las letras no comunes.

Sea la división $-15a^3b^4c^3d : 3a^2b^2c$

El signo del cociente será $- : + = -$

El coeficiente $15 : 3 = 5$

La parte literal común es $a^3b^4c^3 - (a^2b^2c) = ab^2c^2$

Y finalmente, la parte literal no común $d = d$

Por lo tanto,

$$-15a^3b^4c^3d : 3a^2b^2c = -5ab^2c^2d$$

**OBSERVACION
IMPORTANTE**

Observe que la parte literal común del dividendo actúa de minuendo al efectuar la resta, así como la del divisor actúa de sustraendo. Debe respetarse siempre este orden, ya que de lo contrario se falsearía el resultado.

Si al efectuar la división resultara que los coeficientes no tienen cociente exacto, pueden dejarse en forma de quebrado. Asimismo, si los exponentes de la parte literal común son mayores en el divisor que en

el dividendo, se restan como si fueran números **negativos**, colocando, en el cociente resultante, las letras afectadas de un exponente negativo. Por ejemplo:

$$12a^5b^2d : 8a^3b^6c$$

Se dividen los coeficientes o se dejan en forma de quebrado.

Coeficiente ----- $12 : 8 = 1\frac{1}{2}$
 o también, ----- $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Se restan las partes literales de ambos términos.

Parte literal $\frac{a^5b^2d}{a^3b^6c}$
 $a^2b^{-4}c^{-1}d$

$$\begin{array}{r} a^5 b^2 d \\ a^3 b^6 c \\ \hline a^2 b^{-4} c^{-1} d \end{array}$$

Letra no común

Resultado $12a^5b^2d : 8a^3b^6c = \frac{3}{2} a^2b^{-4}c^{-1}d$

Observe que la letra *c* del divisor va también afectada de coeficiente negativo, indicando de esta forma que esta letra pertenece al divisor. Las letras *no comunes* del divisor llevan siempre los exponentes precedidos del signo $-$. En el apartado *Potenciación* explicaremos lo que significan los exponentes negativos.

b) Dividir un polinomio por un monomio

REGLA GENERAL

En este caso se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio, como antes se ha explicado. Los sucesivos cocientes forman la expresión algebraica resultante.

Tomemos por ejemplo la división

$$(8a^5 - 4a^4b + 28a^3b^2 - 4a^2) : 4a^2$$

Dividiendo por separado cada uno de los términos por $4a^2$,

Dividimos cada uno de los términos del dividendo por el monomio divisor

$$\begin{array}{l} 8a^5 : 4a^2 = 2a^3 \\ -4a^4b : 4a^2 = -a^2b \\ 28a^3b^2 : 4a^2 = 7ab^2 \\ -4a^2 : 4a^2 = -1 \end{array}$$

Colocando los cocientes en forma de expresión algebraica

Y expresando todos estos cocientes en forma de expresión algebraica tendremos

$$(8a^5 - 4a^4b + 28a^3b^2 - 4a^2) : 4a^2 = 2a^3 - a^2b + 7ab^2 - 1$$

El último término del polinomio sólo se diferencia del monomio divisor en el signo. En este caso, al dividir los coeficientes nos da -1 , y al efectuar la división de la parte literal nos encontramos ante un caso que ya es viejo amigo nuestro:

$$a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$$

Recuerde que en la primera lección de *Aritmética* vimos que cualquier número elevado a la potencia cero era igual a la unidad. Asimismo, cualquier término elevado a la potencia cero es igual a la unidad. Y por tanto:

$$-4a^2 : 4a^2 = -1^0 = -1 \cdot 1 = -1$$

También en la división de polinomios por monomios podemos hallarnos con exponentes negativos, como por ejemplo:

$$(12a^3b^2x^4 + 6ab^2) : 3a^2bx^2$$

En el primer término la parte literal se corresponde letra a letra. Por tanto,

$$12a^3b^2x^4 : 3a^2bx^2 = 4abx^2$$

No así en el segundo término, en el que la letra a tiene menor exponente y carece de letra x . Por tanto el resultado tendrá dos exponentes negativos:

$$6ab^2 : 3a^2bx^2 = 2a^{-1}bx^{-2}$$

El cociente completo será:

$$4abx^2 + 2a^{-1}bx^{-2}$$

c) Dividir dos polinomios

Ante todo, para dividir dos polinomios es preciso que ambos tengan alguna letra ordenada en el mismo sentido. Por tanto, lo primero que debe efectuarse es la ordenación de los polinomios respecto a una misma letra. A continuación se procede de la siguiente forma:

Sean los polinomios $8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2$ (ordenado ya con respecto a la letra a) y $4a^2 - 2ab$.

Dispongámoslos como si fuéramos a efectuar una división con números:

$\begin{array}{r} 8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4a^2 - 2ab \\ \hline 2a^4 \end{array}$	<p>Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor.</p>	\blacktriangleright	$8a^6 : 4a^2 = 2a^4$
$\begin{array}{r} 8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2 \\ - 8a^6 + 4a^5b \\ \hline 0 - 12a^5b \end{array}$	$\begin{array}{r} 4a^2 - 2ab \\ \hline 2a^4 \end{array}$	<p>A continuación se multiplica <i>todo</i> el divisor por el cociente obtenido. El producto se resta de los primeros términos del dividendo.</p>	\blacktriangleright	$\begin{array}{r} 4a^2 - 2ab \\ \times \quad 2a^4 \\ \hline 8a^6 - 4a^5b \end{array}$

Observe que al producto obtenido de **multiplicar** el cociente por el divisor se le han cambiado los signos al restarlos del dividendo. Efectivamente, siendo el producto

$$(4a^2 - 2ab) 2a^4 = 8a^6 - 4a^5b$$

al restarlo de los dos primeros términos tenemos

$$(8a^6 - 16a^5b) - (8a^6 - 4a^5b)$$

Ya sabe que para suprimir un paréntesis precedido del signo — deben cambiarse los signos de todos los términos que encierra; y por tanto quedará así:

$$8a^6 - 16a^5b - 8a^6 + 4a^5b$$

que reducido queda en

$$8a^6 - 8a^6 - 16a^5b + 4a^5b = -12a^5b,$$

resultado obtenido en el resto de la división.

<p>Al primer resto se le añade un nuevo término del dividendo.</p> <p>Primer resto</p>	$\begin{array}{r} 8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2 \\ - 8a^6 + 4a^5b \\ \hline -12a^5b + 10a^4b^2 \end{array}$	<div style="display: inline-block; border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; text-align: center;"> $\frac{4a^2 - 2ab}{2a^4}$ </div> <p>Al resto obtenido se le añade un nuevo término del dividendo.</p>
--	--	---

<p>$-12a^5b$ ←</p> <p>$4a^2$ ←</p> <p>$=3a^3b$ ←</p> <p>Segundo término del cociente</p> <p>Primer término del divisor</p> <p>Primer término del primer dividendo parcial</p>	$\begin{array}{r} 8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2 \\ - 8a^6 + 4a^5b \\ \hline -12a^5b + 10a^4b^2 \end{array}$	<div style="display: inline-block; border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; text-align: center;"> $\frac{4a^2 - 2ab}{2a^4 - 3a^3b}$ </div> <p>Y se divide el primer término de este dividendo parcial por el primer término del divisor, atendiendo a la regla de los signos.</p>
<p>El último término obtenido del cociente se multiplica por todo el divisor. El producto obtenido, con los signos cambiados, se resta del dividendo parcial.</p>	$\begin{array}{r} 8a^6 - 16a^5b + 10a^4b^2 \\ - 8a^6 + 4a^5b \\ \hline -12a^5b + 10a^4b^2 \\ + 12a^5b - 6a^4b^2 \\ \hline 0 + 4a^4b^2 \end{array}$	

Si hubiera más términos en el dividendo, volvería ahora a formarse otro dividendo parcial, y se operaría de igual forma. La anterior división es inexacta, con un resto igual a $4a^4b^2$, siendo el cociente $2a^4 - 3a^3b$.

UN EJEMPLO

No es difícil dividir polinomios, pero sí necesita práctica. A continuación exponemos otro ejemplo, con la división totalmente terminada, a

fin de que usted intente seguirla paso a paso. Efectuaremos la división:

$$(22a^2b^2 + 15b^4 + 3a^4 - 10a^3b - 22ab^3) : (a^2 + 3b^2 - 2ab)$$

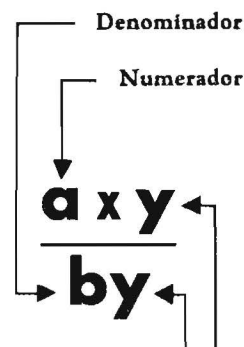
Ordenando los polinomios, y disponiéndolos como en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} 3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4 \quad | \quad a^2 - 2ab + 3b^2 \\ - 3a^4 + 6a^3b - 9a^2b^2 \quad | \quad 3a^2 - 4ab + 5b^2 \\ \hline - 4a^3b + 13a^2b^2 - 22ab^3 \\ + 4a^3b - 8a^2b^2 + 12ab^3 \\ \hline 5a^2b^2 - 10ab^3 + 15b^4 \\ - 5a^2b^2 + 10ab^3 - 15b^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Cuando la división se deja indicada, separando dividendo y divisor por una raya horizontal, nos encontramos ante la fracción algebraica, que se corresponde, en propiedades y características, con los quebrados aritméticos.

Así, la expresión $\frac{20a^5b^4}{5a^4b}$ es una fracción compuesta de un numerador $20a^5b^4$ y de un denominador $5a^4b$, llamados también términos de la fracción.



Términos de la fracción algebraica.

Los términos pueden estar formados indistintamente por monomios o polinomios.

Al igual que con sus homónimos aritméticos, las fracciones algebraicas no se alteran si sus dos términos se multiplican o dividen por una misma cantidad, lo cual nos permite proceder a su simplificación.

SIMPLIFICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Teniendo en cuenta que la letra potenciada puede escribirse de cualquiera de estas formas:

$$a^4 = a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a,$$

podríamos escribir la fracción $\frac{20a^5b^4}{5a^4b}$ procurando que los factores tuvieran el mismo exponente:

$$\frac{20a^5b^4}{5a^4b} = \frac{5 \cdot 4a^4abb^3}{5a^4b}$$

$$\frac{5 \cdot 4a^4abb^3}{5a^4b}$$

Eliminando en numerador y denominador la expresión $5a^4b$, común a ambos, quedaría en

$$\frac{20a^3b^4}{5a^4b} = \frac{5 \cdot 4 \cdot a^4 \cdot a \cdot b \cdot b^3}{5a^4b} = \frac{(4ab^3) \times (5a^4b)}{(5a^4b)} = 4ab^3$$

Si se tratara de simplificar la fracción

$$\frac{a + b}{a^2 - b^2}$$

deberemos hallar primero la expresión inicial de $a^2 - b^2$. Recuerde que la diferencia de los cuadrados de dos números es igual al producto de la suma por la diferencia de dichos números, o sea, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Por tanto, sustituyendo por esta segunda expresión el denominador de la fracción:

$$\frac{a + b}{(a + b)(a - b)} = \frac{1}{(a - b)}$$

puesto que el factor $(a + b)$ es común a ambos términos.

En los dos ejemplos anteriores habrá observado que cuando al simplificar nos encontramos con que uno de los términos, numerador o denominador, está contenido en el otro, el resultado difiere según cuál sea el contenido. En el primer caso era el denominador el que estaba contenido en el numerador, y por ello el resultado era una expresión entera (como ocurre, por ejemplo, en el quebrado $\frac{8}{2} = 4$), desapareciendo el denominador. Por lo contrario, en el segundo caso es el numerador el que está contenido en el denominador. Aquí no desaparece el numerador, sino que se sustituye por la unidad (como en el quebrado $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$). Tenga siempre presente esta particularidad al simplificar fracciones algebraicas, ya que el resultado difiere mucho entre

$$\frac{1}{(a - b)} \text{ ó } (a - b).$$

OBTENCION DE FRACCIONES CON UN DENOMINADOR DETERMINADO

De la misma forma que pueden simplificarse las fracciones, podemos obtener otras fracciones con el denominador que nos interese. Por ejemplo, si tenemos la fracción $\frac{5x}{3a}$, y deseamos convertirla en otra fracción cuyo denominador sea $60abc$, no tendremos más que dividir este último

denominador por el de la fracción. Con el cociente obtenido, se multiplican los dos términos de la fracción:

$$\frac{5x}{3a} = \frac{5x \cdot 20bc}{3a \cdot 20bc} = \frac{100bcx}{60abc}$$

De esta forma pueden obtenerse las fracciones que más interesen para el cálculo, como veremos más adelante.

REDUCCION DE FRACCIONES

Cuando se dispone de varias fracciones algebraicas con distinto denominador, se ignora la relación que pueda existir entre ellas, o si tienen factores comunes. Para ello es necesario que todos sus denominadores sean iguales; o, lo que es igual, es preciso reducir las fracciones a un común denominador.

Cuando los denominadores son sencillos, bastará con colocar un denominador que sea el producto de todos ellos. Por ejemplo, con las fracciones

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$$

el cálculo del denominador común no presenta complicación alguna. Bastará colocar el denominador bdf a cada una de las fracciones, multiplicando el numerador por los denominadores de las otras fracciones.

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} = \frac{a \cdot df}{b \cdot df}, \frac{c \cdot bf}{d \cdot bf}, \frac{e \cdot bd}{f \cdot bd}$$

Pero por regla general no es tan fácil el cálculo. Cuando los denominadores son algo complicados, o son polinomios, será mejor recurrir al mínimo común denominador.

Para determinar éste, se descomponen todos los denominadores en sus factores simples.

Así las expresiones $\frac{6a}{15ab}, \frac{3bc}{12ac}, \frac{5ab}{20bc}, \frac{d}{4a}$, cuyos denominadores son algo complejos, pueden reducirse a común denominador de esta forma:

El denominador 15ab es igual a	$3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$
12ac	$a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot c$
20bc	$a \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot b \cdot c$
4a	$a \cdot 2 \cdot 2 \cdot a$

Ahora tomemos la primera descomposición $3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$ y vayamos añadiéndole aquellos factores de las otras descomposiciones que no estén en esa primera:

$$3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot 2 \cdot 2 \cdot c$$

$$\frac{60abc}{3a} = 20bc$$

↑
Expresión por la que deberemos multiplicar los dos términos de la fracción.

Denominador de la fracción.

Denominador que nos interesa

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 5ab \\ \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cancel{a} c \\ \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cancel{b} c \\ 2 \cdot \cancel{2} \cancel{a} \end{array}$$

Los factores 2 y c son los únicos que no están en la primera descomposición.

El factor $2 \cdot 2$ se cuenta como uno solo, puesto que proviene de la descomposición del coeficiente 4. Si tomásemos sólo un 2, el coeficiente que nos daría sería divisible por 2, pero no por 4.

El resto de las letras y productos se repite, y por tanto podemos prescindir de ellos.

Por tanto, el mínimo común denominador será

$$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot c = 60abc$$

Observe que con los factores tomados podemos componer cualquiera de los denominadores dados. De no ser así habríamos errado en la descomposición en factores simples o al tomar los factores no repetidos.

Ya determinado el mínimo común denominador, procederemos a sustituir por éste los denominadores de las fracciones algebraicas dadas, de la forma ya indicada al tratar de la transformación de un denominador en otro que nos interesa.

Según vimos, se divide el mínimo común denominador (que es el denominador que nos interesa colocar a las fracciones) por el denominador de cada fracción. Luego se multiplican éstas por el cociente que nos dé. Reduzcamos las fracciones arriba indicadas al mínimo común denominador hallado:

Siga una por una todas las operaciones que siguen.

Primera fracción:

$$\frac{6a}{15ab}$$

El cociente de dividir el mínimo común denominador por el denominador de la fracción es

$$60abc : 15ab = 4c;$$

y multiplicando los dos términos de la fracción por este cociente,

$$\frac{6a}{15ab} \cdot 4c = \frac{24ac}{60abc},$$

fracción esta última en la que el denominador es el que nos interesaba.

Efectuemos la misma operación con la segunda fracción,

$$\frac{3bc}{12ac} \cdot 5b = \frac{15b^2c}{60abc}$$

Y con la tercera,

$$\frac{5ab}{20bc} \cdot 3a = \frac{15a^2b}{60abc}$$

Y, por fin, con la última,

$$\frac{d}{4a} \cdot 15bc = \frac{15bcd}{60abc}$$

De esta forma hemos conseguido que las expresiones

$$\frac{6a}{15ab}, \frac{3bc}{12ac}, \frac{5ab}{20bc}, \frac{d}{4a}$$

de denominador heterogéneo se conviertan en estas cifras:

$$\frac{24ac}{60abc}, \frac{15b^2c}{60abc}, \frac{15a^2b}{60abc}, \frac{15bcd}{60abc}$$

equivalentes a las anteriores, pero de denominador común.

Observando detenidamente las fracciones anteriores, puede verse que todos los numeradores y el denominador común tienen un factor que también les es común. En este caso procede efectuar la simplificación de las fracciones

$$\frac{3 \cdot 8ac}{3 \cdot 20abc}, \frac{3 \cdot 5 \cdot b^2c}{3 \cdot 20abc}, \frac{3 \cdot 5 \cdot a^2b}{3 \cdot 20abc}, \frac{3 \cdot 5bcd}{3 \cdot 20abc}$$

suprimiendo el factor 3, sin que se altere el valor numérico de las fracciones ni la particularidad de tener común denominador:

$$\frac{8ac}{20abc}, \frac{5b^2c}{20abc}, \frac{5a^2b}{20abc}, \frac{5bcd}{20abc}$$

A este mismo resultado hubiéramos llegado simplificando las expresiones fraccionarias originales. Recuerde siempre, antes de iniciar cualquier operación o reducción, la necesidad de simplificar las expresiones fraccionarias si es posible. Se evitará dificultades en el cálculo.

Cuando el denominador es un polinomio, lo más sencillo es multiplicar todos los denominadores, reduciendo los términos semejantes. El último producto será el denominador común. Luego se procede de igual forma que como se ha explicado. El cálculo es más laborioso, y necesitará de toda su paciencia para no mandarlo a paseo. Sobre todo, es indispensable prestar mucha atención a los signos de los términos. El cambio de un solo signo altera por completo el resultado.

Antes de adentrarnos en las operaciones con las fracciones algebraicas creo necesario efectuar aún un par de incisos. Se preguntará para qué tanta letra, ¿no? No crea que cuanto lleva estudiado es agua pasada. En el cálculo con fórmulas —como son cuantos se encuentran en la vida cotidiana, ya sea en la rama de la electricidad como de la radiotecnica, de la mecánica, de la construcción y cuantas ramas técnicas existen— es indispensable el dominio del cálculo algebraico, por cuanto aquellas, las fórmulas, vienen dadas con letras y adoptan las formas de polinomios más o menos sencillos. No vea, por tanto, en estas lecciones algo inútil, sino

que, por lo contrario, piense que de su mayor o menor asimilación depende el que le sea más fácil entrar en el campo técnico.

DOS INCISOS

Y vayamos con el primer inciso. Al tratar del mínimo común denominador hemos hablado de la descomposición de los denominadores en sus factores simples. Ahora bien, existen ciertos denominadores que no están compuestos por factores, sino por sumandos. Tal es el caso de las fracciones

$$\frac{9}{a+b}, \frac{x}{x-1},$$

en las que los denominadores son binomios. El factor es *todo* el denominador, y por tanto éste entrará completo en el mínimo común denominador. Sea, por ejemplo, la simplificación de las fracciones

$$\frac{9}{a+b}, \frac{7}{a}$$

El denominador común será $(a+b) \cdot a$ y no $a+b$ solamente, como podría creerse. La simplificación total será, por tanto,

$$(a+b) \cdot a = a^2 + ab \text{ como mínimo común denominador.}$$

Procediendo de la forma consabida (aunque en este caso, por ser sólo dos fracciones, no sería necesario, bastando multiplicar cada numerador por el denominador de la otra fracción), tendremos

$$\begin{aligned} (a^2 + ab) : (a+b) &= a \\ \frac{9}{a+b} \cdot a &= \frac{9a}{a^2 + ab} \\ (a^2 + ab) : a &= a+b \\ \frac{7}{a} \cdot (a+b) &= \frac{7(a+b)}{a^2 + ab} = \frac{7a+7b}{a^2 + ab} \end{aligned}$$

El segundo inciso se refiere a una particularidad de las fracciones. El signo menos (—) antepuesto a una fracción afecta a toda la fracción. Por lo contrario, los signos que pueda tener cada uno de los términos de la fracción afectan solamente a éstos. No obstante, podemos cambiar todos los signos que tenga uno de los términos si se efectúa lo propio con los del otro. Por ejemplo, las fracciones

$$\frac{3x+15}{4x-2y} \text{ y } \frac{-3x-15}{-4x+2y}$$

son equivalentes, por cuanto tienen los signos del numerador y del denominador intercambiados. Sustituya x por 25 e y por 5 y verá cómo dan el mismo resultado.

Inversamente, para cambiar el signo de la fracción (el que la afecta toda), basta con cambiar los signos de uno de los términos, sin tocar los del otro.

Tomemos dos fracciones cualesquiera,

$$-\frac{c+5}{c-5} \text{ y } \frac{x-a}{a-x}$$

La primera está afectada del signo menos (—), y deseamos suprimirlo, para convertirla en positiva. Según la regla dada: :

$$-\frac{c+5}{c-5} = \frac{c+5}{-c+5}$$

La fracción ahora es positiva, pero no se ha alterado su valor numérico.

La segunda es un caso muy curioso. Observe que el denominador tiene las mismas letras que el numerador pero con los signos invertidos. Si al denominador le cambiamos los signos

$$\frac{x-a}{a-x} = -\frac{x-a}{-a+x}$$

la fracción pasa a ser negativa. Y como el orden de los sumandos no altera la suma,

$$-\frac{x-a}{-a+x} = -\frac{x-a}{x-a} = -1$$

De lo cual se deduce que cuando numerador y denominador tienen términos idénticos, pero con los signos cambiados, su valor es igual a la unidad afectada del signo menos.

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las operaciones con las fracciones algebraicas siguen las mismas normas que rigen para las fracciones aritméticas. Por tanto, nos limitaremos a darles un breve repaso.

SUMA

Se reducen los denominadores a un común denominador, y se suman algebraicamente los numeradores, o sea, colocándolos en forma de polinomio. Si se puede, se reducen los términos semejantes que existan, y se procura simplificar la fracción resultante. Por ejemplo:

$$\frac{a+b}{3x} + \frac{a}{12x} =$$

El mínimo común denominador será 12x (puesto que es múltiplo de 3x). Y por tanto:

$$\frac{4(a+b)}{12x} + \frac{a}{12x} = \frac{4a+4b}{12x} + \frac{a}{12x} = \frac{4a+4b+a}{12x}$$

Y sumando los términos semejantes :

$$\frac{4a + 4b + a}{12x} = \frac{5a + 4b}{12x}$$

RESTA

Se reducen también las fracciones a denominador común, y se restan algebraicamente los numeradores.

Lo más frecuente es hallar combinadas la suma y la resta de fracciones algebraicas. En este caso se reducen todas a denominador común, y se escriben todos los numeradores en forma polinómica, afectados del signo que les corresponde. Al final, se reducen términos semejantes y se procura simplificar la fracción :

$$\begin{aligned} & \frac{2a - 3b + 4}{6} - \frac{3a - 4b + 5}{8} + \frac{a - 1}{12} \quad (\text{m.c.d.} = 24) \\ & \frac{4(2a - 3b + 4) - 3(3a - 4b + 5) + 2(a - 1)}{24} \\ & = \frac{8a - 12b + 16 - 9a + 12b - 15 + 2a - 2}{24} = \frac{a - 1}{24} \end{aligned}$$

Observe que al segundo término $- 3(3a - 4b + 5)$ se le han cambiado todos los signos al suprimirse el paréntesis, puesto que va precedido del signo $-$.

MULTIPLICACION

En la multiplicación de fracciones algebraicas no es preciso reducir los denominadores a uno común, sino que bastará con multiplicar entre sí los numeradores, hacer lo mismo con los denominadores, y colocar el producto en el lugar correspondiente.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} & \frac{2ab - 2c}{a - b} \cdot \frac{a + b}{c} = \frac{(2ab - 2c)(a + b)}{(a - b)c} \\ & = \frac{2a^2b - 2ac + 2ab^2 - 2bc}{ac - bc} \end{aligned}$$

DIVISION

Para dividir dos fracciones algebraicas, basta con multiplicar la fracción que actúa como dividendo por la que actúa de divisor invertida. Debe invertirse siempre la fracción que se tenga como *divisor*, nunca al revés.

Así:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} : \frac{a-b}{a+b} &= \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a-b)} \\ &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} \\ \frac{a}{a+z} : \frac{z}{a-z} &= \frac{a}{a+z} \cdot \frac{a-z}{z} = \frac{a(a-z)}{(a+z)z} = \frac{a^2 - az}{z^2 + az} \end{aligned}$$

Observe cómo la fracción invertida es siempre la que actúa de divisor. Este dato, repito, es de gran importancia.

Un caso curioso resulta de la división

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - b^2)}{(a+b)^2} : \frac{a-b}{3a+3b} &= \frac{(a^2 - b^2)}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a+3b}{a-b} = \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(3a+3b)}{(a+b)^2(a-b)} = \frac{3a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - 3b^3}{a^3 - ab^2 + a^2b - b^3} = 3 \end{aligned}$$

puesto que el denominador está compuesto de factores comunes al numerador. Al simplificar la fracción, queda solamente el coeficiente 3, que es común a todos los términos del numerador. De aquí se deduce una regla que puede servirnos para facilitar mucho el cálculo. Se puede escribir un número o expresión algebraica cualquiera en forma de fracción, con el denominador que nos interese, multiplicando el número o expresión por una fracción cuyo denominador y numerador sean iguales entre sí e iguales al denominador que nos interesa. Por ejemplo,

$$2x - y \text{ es igual a } \frac{(2x - y)(a + b)}{a + b} = \frac{2ax - ay - 2bx - by}{a + b}$$

FRACCION DE FRACCION

Es fácil también encontrarse con alguna de las siguientes expresiones fraccionarias:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b} - \frac{1}{x}}{\frac{c}{d} + a} & \quad \frac{\left(\frac{b^2 + 5}{a} \right) cd}{2ac} \end{aligned}$$

en las que el numerador, el denominador o ambos a la vez están formados por otras fracciones. Ante todo, cuando se encuentre con una

de estas fracciones, debe efectuar las operaciones que se indiquen en cada término. Las anteriores se convierten en:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{x} = \frac{ax - b}{bx}$$

$$\frac{c}{d} + a = \frac{c + ad}{d}$$

(Observe que para sumar una fracción con una expresión entera se coloca el producto del denominador por esta expresión como sumando en el numerador.)

Efectuadas las operaciones indicadas en cada término, deberemos reducir la fracción de fracción a una fracción sencilla. Para ello, atienda a la circunstancia de que la raya horizontal que separa ambas fracciones indica una división. Por tanto, la expresión

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{1}{x}}{\frac{c}{d} + a} = \frac{\frac{ax - b}{bx}}{\frac{c + ad}{d}} \quad \text{equivale a} \quad \frac{ax - b}{bx} : \frac{c + ad}{d}$$

Como sabemos, para dividir dos fracciones se invierten los términos del divisor:

$$\frac{\frac{ax - b}{bx}}{\frac{c + ad}{d}} = \frac{ax - b}{bx} : \frac{c + ad}{d} = \frac{ax - b}{bx} \cdot \frac{d}{c + ad}$$

O sea, una fracción de fracción es igual al producto de las dos expresiones extremas (la que está en la parte superior como numerador, y la que está en la parte inferior como denominador) dividido por el producto de las dos expresiones intermedias.

$$\begin{array}{l} \text{Numerador} \rightarrow ax - b \\ \text{Denominador} \rightarrow \frac{bx}{c + ad} \\ \text{Denominador} \rightarrow d \end{array} \quad = \frac{(ax - b) \cdot d}{bx \cdot (c + ad)} = \frac{axd - bd}{bxc + bxad}$$

Procure no equivocarse al colocar cada producto en el lugar que le corresponde. El producto de las expresiones extremas es siempre el numerador, y el de las expresiones intermedias el denominador.

POTENCIACION

La potenciación algebraica tiene el mismo significado que la aritmética. Una letra afectada de un exponente expresa un producto en el que la letra está tomada como factor tantas veces como indica el exponente. En lugar de una sola letra, la potenciación puede afectar a toda una expresión algebraica, ya sea un monomio o un polinomio.

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$(2bx)^2 = (2bx)(2bx)$$

Si la expresión es negativa, debe tenerse presente que si se eleva a una potencia par el resultado es positivo, ya que la regla de los signos también tiene aplicación. Por lo contrario, una expresión negativa elevada a una potencia impar da un resultado negativo,

$$(-a)^6 = a^6$$

pero $(-a)^5 \neq a^5$, sino igual a $-a^5$

puesto que efectuando los productos indicados tenemos que nos da

$$-a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a$$

$$-a^1 + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6$$

donde las potencias pares son positivas y las impares negativas.

Debe distinguir entre las dos expresiones $(-a)^5$ y $-a^5$, ya que son distintas. La primera expresa la potencia de un *número negativo* (o sea, base negativa).

$$(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$$

y la segunda una *potencia negativa* (teniendo la base positiva)

$$-(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$$

Dos potencias son semejantes cuando tienen *bases* y *exponentes* iguales.

$$a^2 \text{ y } a^2 \text{ son semejantes}$$

$$(3ab^2x)^2 \text{ y } (3ab^2x)^2 \text{ son semejantes.}$$

Dos potencias semejantes pueden sumarse o restarse. Así,

$$a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$(3ab^2x)^2 + (3ab^2x)^2 = 2(3ab^2x)^2$$

Cuando un coeficiente afecte a una expresión potenciada debe tenerse presente que afecta al producto final y no a la expresión en sí. Por lo tanto las dos expresiones

$$2(3ab^2x)^2 \text{ y } (6ab^2x)^2$$

son muy distintas, aunque a simple vista parezcan iguales. Lo que sí está permitido, cuando la expresión potenciada tenga coeficiente propio (en el caso anterior el 3), es sacar el coeficiente fuera del paréntesis después de elevarlo a la potencia con que está afectada la expresión.

$$\begin{array}{r} -a \quad (1) \\ \times (-a) \\ \hline +a^2 \quad (2) \\ \times (-a) \\ \hline -a^3 \quad (3) \\ \times (-a) \\ \hline +a^4 \quad (4) \\ \times (-a) \\ \hline -a^5 \quad (5) \\ \times (-a) \\ \hline +a^6 \quad (6) \end{array}$$

La potencia de un número negativo será positiva cuando el exponente sea un número par

$$2(5aX^2)^3 =$$

$$= \cancel{(10aX^2)^3} \text{ ¡MAL!}$$

El factor 2 no queda afectado por el exponente.

$$2 (5a x^2)^3 = 2 \times 5^3 (a x^2)^3$$

¡BIEN!

La potencia del coeficiente debe después multiplicarse por el coeficiente general:

$$2(3ab^2x)^2 = 2 \cdot 3^2(ab^2x)^2 = 2 \cdot 9(ab^2x)^2 = 18(ab^2x)^2$$

Cuando las bases son iguales, pero con distinto coeficiente, bastará sumar el coeficiente y colocar la misma base:

$$5a^4 + 12a^4 = (5 + 12)a^4 = 17a^4$$

En el caso precedente el exponente no afecta al coeficiente, sino únicamente a la letra. Por ello ambas potencias pueden sumarse, ya que la base a es igual en ambas. De ser $(5a)^4$ y $(12a)^4$, no podrían sumarse directamente, sino que antes sería necesario elevar los coeficientes a la potencia indicada:

$$5^4(a)^4 + 12^4(a)^4 = 625a^4 + 20.736a^4 = 21.361a^4$$

De ahí se deduce que puede suprimirse el paréntesis, cuando la expresión afectada por un exponente es un monomio, elevando cada uno de los componentes del monomio a la potencia indicada por el exponente:

$$(3ab^2x)^2 = 9a^2b^4x^2$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Observe que la letra b , que en el monomio estaba ya afectada por un exponente, se ha elevado a una potencia equivalente al producto de su exponente por el de la expresión ($2 \times 2 = 4$), puesto que la potencia de otra potencia de la misma base es igual al producto de los exponentes como potencia de esta base.

O sea,

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

$$\begin{array}{l} 3 \times 2 = 6 \\ (ax^2)^3 = \\ = a^3 x^6 \\ 1 \times 3 = 3 \end{array}$$

Para elevar una base potenciada a una nueva potencia se toma la misma base, elevando cada factor a un exponente igual al producto de exponentes.

MULTIPLICACION Y DIVISION DE POTENCIAS

Si en lugar de la potencia de otra potencia debemos hallar el producto de dos potencias bastará sumar los exponentes, y colocar su suma como nuevo exponente a la misma base:

$$a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$$

Para dividir las, en lugar de sumar los exponentes deben restarse.

POTENCIA DE UNA FRACCION

Cuando la base que debe potenciarse es una fracción, bastará elevar cada uno de los términos de la fracción a la potencia dada. Por ejemplo,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{2ab^2x^2}{-3a^3bxy} \right)^3 = \frac{(2ab^2x^2)^3}{(-3a^3bxy)^3} = \frac{8a^3b^6x^6}{-27a^9b^3x^3y^3}$$

suprimiendo el paréntesis mediante la elevación de los componentes a la potencia indicada. Tenga presente que estas supresiones de paréntesis sólo pueden efectuarse cuando el término que encierran es un monomio. Si en el paréntesis existe un signo más o menos entre dos expresiones, o sea que hay un polinomio, la citada supresión ya no es posible.

UN DETALLE

En $(3d^2y)^3$ puede suprimirse el paréntesis, quedando en $27d^6y^3$; pero en cambio en $(a^3b - d)^3$ no es posible, por cuanto la expresión que encierra es un binomio.

POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

Si una letra o una expresión está afectada de un coeficiente negativo, *no es una potencia*, ya que el exponente sólo indica las veces que dicho término se toma como factor, y como es natural resulta ilógico tomar un término como factor, por ejemplo, -2 veces. ¿Qué significa, pues, un exponente negativo? Ni más ni menos que una división, o una fracción, puesto que sabemos que ambos términos significan lo mismo. El exponente (llamémosle así) negativo viene a expresar una fracción en la que el numerador es siempre la unidad, y el denominador está formado por la letra o expresión afectada por dicho exponente negativo, elevada a un exponente *positivo* igual al negativo de la forma entera. Por ejemplo:

$$\frac{1}{a^2 + b} = (a^2 + b)^{-1}$$

$$\frac{1}{(a^2 + b)^2} = (a^2 + b)^{-2}$$

$$\frac{1}{15ab^2} = (15ab^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{b^4} = b^{-4}$$

$$\frac{a^{-2} - b^{-3}}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

En todos estos ejemplos se cumple:
numerador = 1
denominador:
es la expresión entera con el exponente positivo.

Una expresión con exponente negativo...

$$(2ab)^{-3}$$

es igual a la unidad...

$$1$$

$$(2ab)^3$$

dividida por la misma expresión...

...elevada al mismo exponente, pero con signo positivo

RADICACION

La raíz de un grado cualquiera de una expresión es otra expresión que, elevada a ese mismo grado, reproduce a la primera.

Así, la raíz cúbica de $8a^6$ será $2a^2$, ya que si elevamos esta última al cubo nos da la primera:

$$(2a^2)^3 = 8a^6$$

Los signos empleados para indicar las raíces son los mismos que en aritmética, y reciben los mismos nombres. Por tanto, la anterior expresión debe indicarse así:

$$\sqrt[3]{8a^6} = 2a^2$$

REGLAS PARA LA RADICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

De este ejemplo podemos obtener la regla general para la extracción de raíces: cuando el coeficiente tiene raíz exacta del grado solicitado, se extrae ésta y se coloca como coeficiente de la raíz buscada; si las letras vienen afectadas de un exponente igual o múltiplo del índice de la raíz, se divide dicho exponente por la raíz y el cociente se coloca como nuevo exponente de la letra. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8a^9b^{12}x^3} = 2a^3b^4x$$

La raíz de un monomio también puede expresarse afectando a cada componente del monomio con el signo radical. Así las expresiones

$$\sqrt{abc} ; \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$

son iguales. De igual forma, si la expresión radicada es una fracción, puede indicarse afectando a numerador y denominador, por separado, con el signo radical:

$$\sqrt{\frac{8ac}{ax}} = \frac{\sqrt{8ac}}{\sqrt{ax}},$$

lo que expresa que para extraer la raíz de grado cualquiera de una fracción, basta con extraerla de cada uno de los términos por separado.

Cuando el índice de la raíz y los exponentes de las letras de la expresión radicada no son múltiplos, pero tienen algún factor común, pueden dividirse índice y exponentes por este factor:

$$\sqrt[6]{a^8b^4} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^{2 \cdot 4}b^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^4b^2}$$

Lo inverso, o sea, multiplicar exponentes e índice por un mismo número, también es posible.

Diagram illustrating the simplification of the sixth root of a^8 . The index 6 is divided by 2 to get 3. The exponent 8 is divided by 2 to get 4. The result is the cube root of a^4 .

$$\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}$$

Cuando índice y exponente tienen un factor común pueden dividirse por él

Si un radical (expresión radicada) está afectado por un coeficiente general, éste puede entrar a formar parte de él, previa la elevación del mismo a la potencia del grado que indique el índice del radical:

$$5\sqrt{3ab} = \sqrt{5^2 \cdot 3ab} = \sqrt{25 \cdot 3ab} = \sqrt{75ab}$$

Inversamente, cuando algún factor del radicando tiene raíz exacta, se puede sacar ésta fuera del radical:

$$\sqrt[3]{24a^6b^4c^5} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot b \cdot c^3 \cdot c^2}$$

puesto que b^4 es igual al producto de dos potencias de la base b cuya suma sea 4 ($b^3 \cdot b$; $b^2 \cdot b^2$; $b^4 \cdot b^0$), y c^5 , de dos potencias de base c , cuyos exponentes den 5. Por tanto

$$\sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot a^6 b^3 \cdot b \cdot c^3 \cdot c^2} = 2a^2bc \sqrt[3]{3bc^2}$$

REDUCCION DE RADICALES A UN INDICE COMUN

De igual forma que en las fracciones reducíamos los denominadores a un común denominador, pueden reducirse varios radicales a un índice común. Antes se dijo que el valor de un radical no varía multiplicando el índice y los exponentes del radicando por un mismo número. De ahí se deduce que colocando como índice general el mínimo común múltiplo de todos los índices, y multiplicando luego los exponentes de cada radicando por el cociente de dividir el índice general por el índice que le correspondía a cada uno, obtendremos expresiones equivalentes. Por ejemplo,

$$\sqrt{a^2b} ; \sqrt[3]{ab} ; \sqrt[4]{ab^2}$$

El mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 es 12. Luego el índice general de los tres radicales será 12. Y ahora, dividiendo éste por el índice de cada radical, y multiplicando los exponentes por el cociente que nos dé:

$$12 : 2 = 6 \quad \sqrt{a^2b} = \sqrt[12]{a^{12}b^6}$$

$$12 : 3 = 4 \quad \sqrt[3]{ab} = \sqrt[12]{a^4b^4}$$

$$12 : 4 = 3 \quad \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[12]{a^3b^6}$$

SUMA DE RADICALES

Para sumar radicales es necesario que tengan el mismo índice y la misma expresión subradical (o radicando). De no ser así, la suma se dejará indicada. Igual ocurre con la resta.

MULTIPLICACION DE RADICALES

En cambio, para multiplicar radicales basta con reducirlos a un índice común, y luego multiplicar los radicandos normalmente. El pro-

$$\sqrt{a^2}; \sqrt[3]{a}; \sqrt[4]{a}$$

Para reducir estos radicales a índice común buscaremos el mínimo común múltiplo de los índices:

m. c. m. de 2, 3 y 4 es 12.

$$\sqrt[12]{}; \sqrt[12]{}; \sqrt[12]{}$$

Tendremos tres raíces de grado doce.

$$\sqrt[12]{a^{12}}; \sqrt[12]{a^4} \sqrt[12]{a^3}$$

Para obtener los radicandos dividimos el índice común por el primitivo ($12 : 2 = 6$) y multiplicamos el exponente por el resultado

$$a^2x^6 = a^{12}$$

ducto obtenido será el nuevo radicando:

$$\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[6]{a^9} \cdot \sqrt[6]{4a^4b^2} = \sqrt[6]{4a^{13}b^2} = a^2 \sqrt[6]{4ab^2}$$

DIVISION DE RADICALES

De igual forma se procede con la división de radicales:

$$\sqrt{a^3} : \sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[6]{a^9} : \sqrt[6]{4a^4b^2} = \sqrt[6]{\frac{a^5}{4b^2}}$$

POTENCIACION DE RADICALES

Si lo que se desea es potenciar un radical, bastará con elevar cada componente del radicando a la potencia deseada:

$$(\sqrt{2ab^3c^2})^3 = \sqrt[3]{8a^3b^9c^6}$$

Pero si el exponente es divisor del índice, bastará con dividir éste por el exponente:

$$(\sqrt[6]{2ab^3c^2})^3 = \sqrt[2]{2ab^3c^2}$$

También puede darse la expresión

$$\sqrt[3]{\sqrt{ab^2}}$$

En este caso basta con multiplicar los índices entre sí y extraer la raíz de grado igual al producto obtenido:

$$\sqrt[3]{\sqrt{ab^2}} = \sqrt[6]{ab^2}$$

Todas estas operaciones admiten reciprocidad. O sea, que si para potenciar un radical basta potenciar cada componente del radicando, también es factible extraer una potencia común a todos los componentes del radicando y afectar con ella al radical. O sea,

$$\sqrt[3]{8a^3b^9c^6} = (\sqrt[3]{2ab^3c^2})^3$$

O bien se puede descomponer un radical con índice elevado en otros varios, cuyo producto sea igual a aquél índice :

$$\sqrt[6]{ab^2} = \sqrt[3]{\sqrt{ab^2}} = \sqrt[3]{b\sqrt{a}}$$

COMENTARIO FINAL

Conviene tener siempre presente esta reciprocidad de las operaciones, por cuanto soluciones a simple vista imposibles se hacen fáciles en cuanto se da un rodeo empleando todos los trucos que nos facilita el cálculo algebraico.

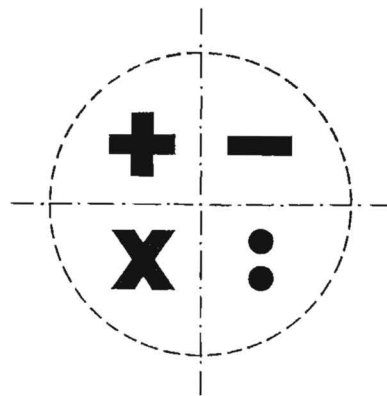
No es normal, desde luego, que en los cálculos que comúnmente reportan los problemas solucionables a partir de fórmulas o ecuaciones (tema que estudiaremos a partir de la próxima lección) deban efectuarse mutaciones complicadas.

MATEMATICAS

Igualdad e identidad

Ecuaciones - Propiedades

Resolución de ecuaciones
de primer grado



LECCION N^o 7

MATEMATICAS

lección séptima

ALGEBRA

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS (IGUALDAD, ECUACIONES DE PRIMER GRADO)

Igualdad o equivalencia - Identidad y ecuaciones - Ecuación literal y ecuación numérica - Clasificación de las ecuaciones - Grado de una ecuación - Resolución de una ecuación - Sistema de ecuaciones - Propiedad de las ecuaciones - Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita - Ecuación de primer grado con dos incógnitas - Método de sustitución - Método de igualación o comparación - Método de reducción o eliminación - Resolución de tres ecuaciones con tres incógnitas

IGUALDAD O EQUIVALENCIA

Se entiende por igualdad la relación que existe entre dos expresiones diferentes de una misma cantidad. Así, cualquier cantidad puede expresarse por el número que la determina, o por este mismo descompuesto en sumandos. Por ejemplo, el valor de 8 es igual a $4+4$, $5+3$, etc. La representación gráfica de que dos cantidades son iguales se indica con dos trazos paralelos que separan las dos cantidades. El ejemplo anterior se indicaría de esta forma:

$$8 = 5 + 3$$

También se le da el nombre de equivalencia.

IDENTIDAD

Lo mismo que ocurre con los números, podemos expresar las igualdades mediante letras, o sea algebraicamente. En este caso, la igualdad siempre subsiste, cualquiera que sea el valor que se atribuya a las letras. Recordará, por ejemplo, que en lecciones anteriores vimos que el producto de la suma de dos números por su diferencia era igual a la diferencia de sus cuadrados. Expresándolo en forma de igualdad:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Si ahora sustituye las letras por unos valores cualesquiera, comprobará que la igualdad siempre subsiste, como afirmaba anteriormente. En este caso, la igualdad se conoce por los nombres de IDENTIDAD o FÓRMULA.

ECUACION

Si, por lo contrario, una igualdad expresada algebraicamente sólo se verifica ordinariamente para determinados valores de las cantidades literales, nos hallamos ante las denominadas ECUACIONES. Por ejemplo, en la igualdad

$$3x + 12 = 36$$

sólo se cumple para un valor de $x = 8$, puesto que:

$$3x = 3 \times 8 = 24 \quad 24 + 12 = 36$$

Si intenta sustituir la x por cualquier otro valor, comprobará que la solución no es correcta, ya que el resultado que dé no será igual al segundo miembro de la igualdad propuesta.

En las ecuaciones las cantidades desconocidas se denominan INCÓGNITAS y normalmente se representan por las letras x , y , z . De existir más incógnitas, aun cuando no es usual, se utilizan para su representación sucesivamente las letras anteriores a las citadas (... v , u , etc.).

ECUACION LITERAL Y ECUACION NUMERICA

Cuando además de las incógnitas tiene letras tomadas como cantidades conocidas o datos, la ecuación se llama LITERAL. En las ecuaciones de esta clase los datos se representan por las primeras letras del abecedario: a , b , c , ..., etc.

En caso de ser números los datos que aparecen, se tiene una ecuación NUMERICA:

$$\begin{array}{ll} bx + 2x - a = 3x + 2c & \text{es literal} \\ 10 + 4x = 3x + 12 & \text{es numérica} \end{array}$$

Observe que las letras que representan las incógnitas no influyen en la clasificación.

CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES

En cambio, teniendo en cuenta únicamente las incógnitas, podemos clasificar las ecuaciones en enteras, fraccionarias, racionales e irracionales, según que las incógnitas sean a su vez enteras, fraccionarias, racionales e irracionales. Por ejemplo, la ecuación

$$2x - x\sqrt{2} = 3x + \frac{1}{5}$$

es racional y entera, puesto que la incógnita cumple ambos requisitos.

$$\frac{2}{x} - 4x = 3 - x$$

es racional y fraccionaria, por ser la incógnita término de un quebrado. Y finalmente:

$$\sqrt{x} - 1 + 2y = 8$$

es una ecuación irracional, por ser la incógnita un radical.

$$bx = c$$

Ecuación literal que sólo se cumple cuando...

$$x = \frac{c}{b}$$

$$20x = 60$$

Ecuación numérica que sólo se cumple cuando...

$$x = \frac{60}{20} = 3$$



Exponente 1

$$ax = b$$

Ecuación de 1.º grado

Exponente 2

$$ax^2 = b$$

Ecuación de 2.º grado

Exponente 3

$$ax^3 = b$$

Ecuación de 3.º grado

El grado de una ecuación depende del exponente más elevado que afecte a su incógnita

GRADO DE UNA ECUACION

A su vez, en las ecuaciones racionales y enteras se tiene en cuenta el *grado* del término que tiene mayor exponente con respecto a la incógnita o incógnitas. Por ejemplo:

$$ax^2 - by = cx^2y^3 - 4x^4 + 1$$

Con respecto a las dos incógnitas la ecuación es de quinto grado, por cuanto el término que contiene a las dos incógnitas a la vez es cx^2y^3 , y sumando los dos exponentes da 5. Si tenemos en cuenta solamente la x , la ecuación es de cuarto grado, por cuanto el mayor exponente de x es 4, en el término $4x^4$; y con respecto a y la ecuación es de tercer grado, por ser éste el mayor exponente de y en el término cx^2y^3 .

RESOLUCION DE UNA ECUACION

Resolver ecuaciones es hallar los valores que, sustituyendo a las incógnitas, transforman la ecuación en una igualdad numérica. Estos valores son las raíces o soluciones de la ecuación. Podemos conocer el número de soluciones o raíces que puede tener una ecuación conociendo el grado de la misma. Así, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones; una de quinto grado tendrá cinco soluciones. La ecuación se llama *determinada* si una vez resuelta tiene una o varias soluciones definidas; *indeterminada*, si tiene infinidad de soluciones y *absurda* cuando no tiene ninguna solución.

SISTEMA DE ECUACIONES

Cuando dos o más ecuaciones tienen una solución para un mismo valor de sus incógnitas, se les denomina *sistema de ecuaciones*. Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 19 \end{aligned}$$

son dos ecuaciones con dos incógnitas que constituyen un sistema de ecuaciones, por cuanto ambas se satisfacen para los valores $x = 8$, $y = 1$.

$$\begin{aligned} x - y &= 8 - 1 = 7 \\ 2x + 3y &= 16 + 3 = 19 \end{aligned}$$

PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES

Sin alterar las soluciones de una ecuación, se puede añadir o quitar una misma cantidad a sus dos miembros; de ello deducimos que para trasponer un término de un miembro a otro basta con suprimirlo en el miembro en que está y escribirlo en el otro con signo contrario. Así, en la ecuación

$$8x - 7 = 2x + 11,$$

en la que los dos miembros contienen incógnitas, podemos formar otra ecuación en que figuren en uno de los miembros los términos que contengan incógnitas y en el otro los datos numéricos. Según la propiedad anterior tendremos:

$$\begin{aligned}8x - 2x - 7 &= 11 \\8x - 2x &= 11 + 7\end{aligned}$$

Igualmente, pueden multiplicarse o dividirse los dos miembros de una ecuación, sin alterar las soluciones, por una misma cantidad que no contenga incógnita alguna. Según esta propiedad, en las ecuaciones fraccionarias con denominadores numéricos basta multiplicar los términos de los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores. En la ecuación

$$\frac{3x}{2} - 7 = \frac{4x}{5}$$

el m.c.m. de los dos denominadores es 10 ($2 \cdot 5$). Multiplicando todos los términos por este factor tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{3x \cdot 10}{2} - (7 \cdot 10) &= \frac{4x \cdot 10}{5} \\(3x \cdot 5) - 70 &= (4x \cdot 2) \\15x - 70 &= 8x \\15x - 8x &= 70\end{aligned}$$

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

La más sencilla de las ecuaciones es la compuesta por una sola incógnita sin exponente alguno, o sea de primer grado. Para proceder a su resolución, debe en primer lugar *plantearse* la ecuación; o sea, colocar los datos y la incógnita que se posean en forma de ecuación. Por ejemplo, si deseamos conocer tres números consecutivos cuya suma sea 153, plantearemos una ecuación de primer grado de la siguiente forma:

Al menor de los números le denominaremos x .

El inmediato consecutivo será $(x + 1)$.

Y el tercero será también $(x + 2)$.

La suma de estos tres números que desconocemos ha de ser 153; por tanto, la ecuación será:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 153$$

La ecuación ya está planteada. Tenemos una igualdad con sus dos términos, uno de los cuales está compuesto por la incógnita x . En este caso, aun cuando parezca que las incógnitas son tres, las mismas se reducen a una sola, ya que las otras dos no son más que el resultado de sumar una y dos unidades a la incógnita x .

Como los paréntesis van precedidos del signo $+$ podemos suprimirlos y dejar todos los términos con los signos que llevan puestos, quedando así:

$$x + x + 1 + x + 2 = 153$$

$$8x + 1 = 2y$$

Para pasar $2y$ al primer miembro, bastará con darle signo contrario

$$8x + 1 - 2y = 0$$

Lo mismo haríamos para pasar el término $+1$ al segundo miembro: pasaría con signo negativo

$$8x - 2y = -1$$



$$3x = 150$$

Para pasar el coeficiente 3 (factor que multiplica a x) al segundo miembro, deberemos hacerlo pensando que si en el primero multiplica, en el segundo deberá dividir

$$x = \frac{150}{3}$$

Tras esta primera operación podemos reducir los términos semejantes del primer miembro de la ecuación

$$\begin{aligned} x + x + x + 1 + 2 &= 153 \\ 3x + 3 &= 153 \end{aligned}$$

Traspassando el término numérico del primer miembro al segundo, y cambiándole de signo, aislaremos la incógnita de la parte numérica conocida:

$$\begin{aligned} 3x &= 153 - 3 \\ 3x &= 150 \end{aligned}$$

Como dijimos anteriormente, el valor de la ecuación no varía si dividimos los dos miembros por 3

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{150}{3} \\ x &= 50 \end{aligned}$$

En lugar de efectuar la división tal como se ha hecho, se simplifica traspassando el coeficiente que afecta a la incógnita al segundo miembro, de forma que si en el primero multiplica, en el segundo divida y viceversa:

$$\begin{aligned} 3x &= 150 \\ 150 & \\ x &= \frac{150}{3} = 50 \end{aligned}$$

El valor numérico obtenido para x será el menor de los números solicitados, siendo los otros dos:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 50 + 1 = 51 \\ x + 2 &= 50 + 2 = 52 \end{aligned}$$

Sumando los tres números así obtenidos ha de cumplirse la igualdad expresada por la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} x + (x + 1) + (x + 2) &= 153 \\ 50 + 51 + 52 &= 153 \end{aligned}$$

Efectivamente, la igualdad se cumple, satisfaciendo el resultado la condición de que los tres números sean consecutivos.

Al efectuar la reducción de la ecuación se ha llegado a la igualdad:

$$3x = 150$$

Como ambos miembros han de ser iguales, si traspassamos el término del segundo de los miembros al primero, cambiándole el signo (lo que equivale a restar la cantidad 150 de cada miembro), tendremos:

$$\begin{aligned} 3x - 150 &= 150 - 150 \\ 3x - 150 &= 0 \end{aligned}$$

O sea, que si los términos que componen la ecuación se reúnen formando un sólo miembro, el segundo de los miembros será siempre 0.

Esta es la forma general de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, que expresada en ecuación literal es de la forma:

$$Ax - B = 0$$

Debe recordar siempre las propiedades de las ecuaciones, teniendo en cuenta que cuando, una vez reducida la ecuación, queda en uno de los miembros la incógnita afectada de algún coeficiente, ya sea factor, divisor o ambos a la vez, estos coeficientes se trasladan al otro miembro con la operación inversa. Así en la forma general la incógnita queda aislada procediendo a trasladar el término $-B$ al segundo miembro como numerador positivo, y el coeficiente A como denominador. Si el término de la incógnita estuviera afectado por algún signo ($+$ o $-$), éste afecta únicamente a la incógnita, y no al coeficiente. Por tanto, al cambiar el coeficiente de miembro, será siempre como cantidad positiva:

$$x = \frac{B}{A}$$

Si al efectuar la reducción, y una vez aislada la incógnita, ésta estuviera afectada por el signo $-$, deberán cambiarse los signos de los dos miembros, a fin de que la incógnita sea siempre positiva. Por ejemplo:

$$-x = 6 \qquad x = -6$$

Ello se comprende si se tiene en cuenta que equivale a multiplicar los dos miembros por (-1) ,

$$(-x)(-1) = 6(-1) \\ x = -6$$

según la regla de los signos.

Si en lugar de una ecuación numérica, como la que hemos resuelto, se tratara de resolver una ecuación literal, se procede de igual forma aislando la incógnita en uno de los miembros.

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = c$$

El m.c.m. de b y a será su producto ab . Multiplicando todos los términos de los dos miembros por éste, tendremos:

$$(ab)\frac{x}{b} + (ab)\frac{x}{a} = c(ab) \\ \frac{abx}{b} + \frac{abx}{a} = abc$$

Eliminando los factores comunes en cada término:

$$ax + bx = abc$$

$$Ax - B = 0$$

Para trasladar B al segundo miembro de la igualdad, deberemos darle signo positivo

$$Ax = B$$

Para trasladar A al segundo miembro de la igualdad, deberemos pensar que en él deberá efectuarse la operación inversa. Como que en el primer miembro multiplica, en el segundo dividirá

$$x = \frac{B}{A}$$

El primer miembro equivale a

$$x(a + b) = abc,$$

por ser la incógnita común a los dos coeficientes. La suma de éstos, a su vez, podemos traspasarla al segundo miembro como divisor:

$$x = \frac{abc}{a + b},$$

habiendo quedado aislada la incógnita.

Podemos resumir las operaciones a seguir en la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en los siguientes puntos:

1. Se suprimen los paréntesis, si los hay.
2. Se quitan los denominadores.
3. Se efectúan las operaciones indicadas en los polinomios resultantes.
4. Se pasan a un mismo miembro los términos que contienen la incógnita.
5. Se reducen términos semejantes.
6. Se despeja la incógnita, trasladando su coeficiente al otro miembro.

ECUACION DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Si al plantear la ecuación se diera el caso de que el número de incógnitas fuera dos o más, el problema resultaría indeterminado, ya que habrá tantas soluciones como valores se atribuyan a todas las incógnitas menos una. Por ejemplo, en la ecuación $x - 3y + 2z = -1$, podremos despejar una de las incógnitas, x , y nos quedará:

$$x = -1 + 3y - 2z$$

Se aprecia claramente que el valor de x variará con los valores que se atribuyan a y , z . Así, para unos valores:

$$\begin{array}{lll} y = 3 & z = 1 & x \text{ valdría} \\ x = -1 + 3y - 2z \\ x = -1 + (3 \cdot 3) - (2 \cdot 1) \\ x = -1 + 9 - 2 \\ x = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Para } y = -2 & z = 0 & x \text{ valdría} \\ x = -1 + 3y - 2z \\ x = -1 + [3(-2)] - (2 \cdot 0) \\ x = -1 + (-6) - 0 \\ x = -7 \end{array}$$

Como ve, el número de soluciones es infinito, de lo cual deducimos que cuando hay más incógnitas que ecuaciones no es posible hallar una única solución exacta. Sólo cuando el número de incógnitas y ecuaciones es igual se halla una solución determinada.

En un apartado anterior hicimos mención de los denominados SISTEMAS DE ECUACIONES, en los que las soluciones vienen dadas por unos mismos valores de las incógnitas.

Si tomamos un sistema formado por dos ecuaciones con dos incógnitas cada una, el sistema tendrá una solución exacta, por ser igual el número de ecuaciones que el de incógnitas. Para resolver este sistema con dos incógnitas es preciso *eliminar* una de ellas. Se entiende por eliminar una incógnita el hallar una tercera ecuación que no contenga más que la otra incógnita; a esta nueva ecuación se le llama RESULTANTE. Obtenida la ecuación resultante, se hallará su solución como si se tratara de una ecuación de primer grado con una incógnita. El resultado encontrado será el valor de una de las incógnitas; y para hallar el valor de la eliminada, bastará sustituir, en una de las dos ecuaciones iniciales, la incógnita correspondiente por el valor obtenido y proceder a su resolución.

Para eliminar una de las incógnitas se utilizan tres métodos:

1. Método de sustitución;
2. Método de igualación o comparación;
3. Método de reducción o eliminación.

Vamos a examinar paso a paso cada uno de los tres métodos indicados, si bien basta con uno de ellos para resolver cualquier problema. Usted puede escoger el sistema que encuentre más fácil.

METODO DE SUSTITUCION

La característica de este método estriba en despejar una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones; el valor así obtenido de la incógnita eliminada se sustituye en la otra ecuación.

Tenemos por ejemplo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ 5x - 4y = 8 \end{array} \right\}$$

Despejando el valor de x en la primera ecuación, como si se tratara de una de primer grado con una incógnita, obtendremos sucesivamente:

$$3x + y = 15$$

$$3x = 15 - y$$

$$x = \frac{15 - y}{3}$$

Ya conocemos el valor de x . Sustituyendo este valor en la otra ecuación, nos dará:

$$5x - 4y = 8$$

$$5\left(\frac{15 - y}{3}\right) - 4y = 8$$

Empezaremos por eliminar el paréntesis, multiplicando el numerador por el coeficiente:

$$\frac{75 - 5y}{3} - 4y = 8$$

A continuación, y siguiendo el orden establecido para la resolución de las ecuaciones con una incógnita, suprimiremos el denominador, multiplicando éste por los términos a los que no afecta:

$$75 - 5y - 12y = 24$$

Reduciendo los términos semejantes :

$$75 - 17y = 24$$

Y aislando el término que contiene la incógnita :

$$- 17y = 24 - 75$$

$$- 17y = - 51$$

Como ambos miembros están afectados por el signo $-$, podemos suprimir éste en los dos, sin que por ello se altere el valor de la ecuación (puesto que equivale a multiplicar los dos miembros por -1 , como ya dijimos).

Y finalmente, despejando la incógnita nos dará :

$$- 17y = - 51$$

$$17y = 51$$

$$y = \frac{51}{17} = 3$$

Obtenido el valor de y , basta sustituir éste por aquél, en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, para lo que escogeremos la más sencilla de las dos :

$$3x + y = 15$$

$$3x + 3 = 15$$

Y procediendo de igual forma que en la anterior :

$$3x = 15 - 3$$

$$3x = 12$$

$$12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$3$$

$$x = 4$$

La otra ecuación debe también cumplirse para estos dos valores hallados :

$$5x - 4y = 8$$

$$(5 \cdot 4) - (4 \cdot 3) = 8$$

$$20 - 12 = 8$$

$$8 = 8$$

Las soluciones, efectivamente, son las correctas.

METODO DE COMPARACION O IGUALACION

En este método, en lugar de eliminar una incógnita en una sola de las ecuaciones, se elimina en ambas ecuaciones a la vez. Para ello se despeja el valor de la misma incógnita y se igualan después los dos valores hallados.

En el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 4x - y = - 5 \\ 5y + 8x = 32 \end{array} \right\}$$

procederemos a despejar el valor de x:

$$\begin{array}{rcl}
 4x - y & = & -5 \\
 4x & = & -5 + y \\
 & -5 + y & \\
 \hline
 x & = & \frac{y - 5}{4}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 5y + 8x & = & 32 \\
 8x & = & 32 - 5y \\
 & 32 - 5y & \\
 \hline
 x & = & \frac{32 - 5y}{8}
 \end{array}$$

Conocidos los dos valores, y puesto que los segundos miembros de ambas ecuaciones son iguales a la misma incógnita, se deduce que han de ser iguales entre sí, y por tanto podemos formar una tercera ecuación con los dos segundos miembros, prescindiendo de la incógnita x.

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & \frac{y - 5}{4} \\
 x & = & \frac{32 - 5y}{8} \\
 \hline
 \frac{y - 5}{4} & = & \frac{32 - 5y}{8}
 \end{array}$$

Procediendo a la supresión de los denominadores, y puesto que 8 es el m.c.m. de ambos, multiplicaremos los dos miembros por éste:

$$\begin{array}{rcl}
 \left(\frac{y - 5}{4} \right) 8 & = & \left(\frac{32 - 5y}{8} \right) 8 \\
 (y - 5) 2 & = & (32 - 5y) 1 \\
 2y - 10 & = & 32 - 5y
 \end{array}$$

Trasladando los términos que contienen incógnitas al primer miembro y los numéricos al segundo, tendremos:

$$\begin{array}{rcl}
 2y + 5y & = & 32 + 10 \\
 7y & = & 42 \\
 & 42 & \\
 y & = & \frac{42}{7} \qquad y = 6
 \end{array}$$

Obtenido el valor de y, se sustituye, como en el método de sustitución, en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, para obtener el valor de x:

$$\begin{array}{rcl}
 4x - y & = & -5 \\
 4x - 6 & = & -5 \\
 4x & = & -5 + 6 \\
 4x & = & 1 \\
 & 1 & \\
 x & = & \frac{1}{4}
 \end{array}$$

METODO DE REDUCCION O ELIMINACION

Recordará que en un párrafo anterior, al tratar de las propiedades de las ecuaciones, le indicamos que el valor de las mismas no se altera si se multiplican todos los términos de una ecuación por una misma cantidad. Basándose en esta propiedad, podemos igualar los coeficientes de una de las incógnitas. De esta forma el segundo miembro queda afectado únicamente por las variaciones de la otra incógnita.

Veámoslo por medio de un ejemplo práctico:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\}$$

Como los coeficientes de x son primos entre sí, deberemos hallar primeramente su m.c.m., que en este caso será igual al producto de ambos coeficientes:

$$\text{m.c.m. } 2 \cdot 3 = 6$$

Y ahora se multiplica cada ecuación por el cociente obtenido de dividir el m.c.m. por el coeficiente correspondiente a la incógnita x .

En la primera ecuación este cociente será $\frac{6}{2} = 3$; por tanto, mul-

tiplicando todos los miembros de esta ecuación por 3 obtendremos esta otra:

$$\begin{array}{l} 3(2x + 3y) = (12 \cdot 3) \\ 6x + 9y = 36 \end{array}$$

En la segunda ecuación el cociente será $\frac{6}{3} = 2$; y procediendo igualmente a multiplicar los términos por éste:

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 2(3x - 2y) = 5 \cdot 2 \\ 6x - 4y = 10 \end{array}$$

En las dos ecuaciones así obtenidas el término que contiene la x es igual:

$$\begin{array}{l} 6x + 9y = 36 \\ 6x - 4y = 10 \end{array}$$

Y ahora observe atentamente, ya que cuanto vamos a ver constituye el secreto de este método:

En la primera ecuación, el primer miembro completo es igual al segundo.

Igual ocurre en la segunda ecuación.

Por tanto, restar los dos primeros miembros entre sí será igual a restar también los dos segundos miembros entre sí, puesto que equivaldrá a restar una misma cantidad a los dos miembros de la primera ecuación. El resto obtenido será la ecuación resultante.

En ésta no figurará el término que contiene la incógnita x , ya que, al ser igual en ambas ecuaciones, al restarse se anula.

$$\left. \begin{array}{r} 6x + 9y = 36 \\ -(6x - 4y = 10) \end{array} \right\}$$

se convierte en:

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 36 \\ -6x + 4y = -10 \\ \hline 0 \quad 13y = 26 \end{array}$$

Recuerde, al restar la segunda ecuación, que debe cambiar los signos de todos sus términos.

Aislando la incógnita en la ecuación resultante:

$$y = \frac{26}{13} \quad y = 2$$

Y a continuación se procede como en los anteriores métodos:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ 2x + (3 \cdot 2) = 12 \\ 2x + 6 = 12 \\ 2x = 12 - 6 \\ 2x = 6 \\ x = \frac{6}{2} \\ x = 3 \end{array}$$

No siempre se procede a restar la segunda ecuación de la primera. Cuando en aquélla el término que contiene la incógnita va precedido del signo opuesto al del término equivalente de la primera ecuación, debe simplemente *sumarse* ambas ecuaciones. Por ejemplo, si después de efectuadas las oportunas operaciones quedara un sistema de ecuaciones de esta forma:

$$\left. \begin{array}{r} 10x - 2y = 10 \\ -10x + 15y = 55 \end{array} \right\}$$

sumando ambas ecuaciones obtendremos ya la eliminación del término con la incógnita x .

$$\begin{array}{r} 10x - 2y = 10 \\ -10x + 15y = 55 \\ \hline 0 \quad 13y = 65 \\ 65 \\ y = \frac{65}{13} \quad y = 5 \end{array}$$

Observe que el objeto de la resta que hemos indicado al principio no es otro que llegar a obtener un sistema de ecuaciones parecido a este último ejemplo; o sea, un sistema en el que los términos que contiene la incógnita a eliminar tengan signo opuesto.

Este método es más rápido que los precedentes cuando una incógnita tiene igual coeficiente en ambas ecuaciones, o cuando con una sola operación se pueden igualar dichos coeficientes; y además tiene la ventaja de no introducir términos fraccionarios.

RESOLUCION DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS

Cuando el sistema está formado por tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de forma parecida al sistema anterior. También en este caso se puede proceder a la eliminación por sustitución, igualación y reducción.

Para ello, en el caso de la eliminación por sustitución, suponiendo el sistema :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 20 \\ 4x + 2y - 3z = 11 \\ 3x + 4y + 2z = 53 \end{array} \right\} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

despejaremos la x en la ecuación [1].

$$\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z = 20 \\ 20 + 3y - 4z \\ x = \frac{\quad}{2} \end{array}$$

El valor así obtenido se sustituye en las ecuaciones [2] y [3]:

$$\begin{array}{l} 4 \left(\frac{20 + 3y - 4z}{2} \right) + 2y - 3z = 11 \\ 3 \left(\frac{20 + 3y - 4z}{2} \right) + 4y + 2z = 53 \end{array}$$

Eliminando los paréntesis:

$$\begin{array}{r} 80 + 12y - 16z \\ \hline 2 \\ 60 + 9y - 12z \\ \hline 2 \end{array} + 2y - 3z = 11$$

$$\begin{array}{r} 60 + 9y - 12z \\ \hline 2 \end{array} + 4y + 2z = 53$$

Quitando los denominadores:

$$\begin{array}{r} 80 + 12y - 16z + 4y - 6z = 22 \\ 60 + 9y - 12z + 8y + 4z = 106 \end{array}$$

Reduciendo los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 80 + 16y - 22z = 22 \\ 60 + 17y - 8z = 106 \end{array}$$

Trasladando términos:

$$\begin{aligned} 16y - 22z &= 22 - 80 \\ 17y - 8z &= 106 - 60 \end{aligned}$$

El sistema ha quedado reducido a uno de dos ecuaciones con dos incógnitas, y se procede a su resolución de la forma indicada en los párrafos anteriores:

$$\left. \begin{aligned} 16y - 22z &= -58 \\ 17y - 8z &= 46 \end{aligned} \right\}$$

Resuelto este último sistema, da como valores:

$$y = 6 \quad z = 7$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuación hallada al despejar x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{20 + 3y - 4z}{2} \\ x &= \frac{20 + (3 \cdot 6) - (4 \cdot 7)}{2} \\ x &= \frac{20 + 18 - 28}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por el método de *igualación*, en el mismo sistema propuesto, despejaríamos x en las tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 20 \\ 4x + 2y - 3z &= 11 \\ 3x + 4y + 2z &= 53 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [1] \\ [2] \\ [3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{20 + 3y - 4z}{2} \\ x &= \frac{11 - 2y + 3z}{4} \\ x &= \frac{53 - 4y - 2z}{3} \end{aligned}$$

Iguando uno de los valores hallados con cada uno de los otros dos:

$$\begin{aligned} \frac{20 + 3y - 4z}{2} &= \frac{11 - 2y + 3z}{4} \\ \frac{20 + 3y - 4z}{2} &= \frac{53 - 4y - 2z}{3} \end{aligned}$$

en los que, eliminados los denominadores, queda:

$$\begin{aligned}40 + 6y - 8z &= 11 - 2y + 3z \\60 + 9y - 12z &= 106 - 8y - 4z\end{aligned}$$

Trasladando los términos y reduciendo los semejantes:

$$\left. \begin{aligned}8y - 11z &= -29 \\17y - 8z &= 46\end{aligned} \right\}$$

ha quedado reducido a un sistema de dos ecuaciones, como en el caso anterior.

Utilizando el método de eliminación por *reducción*, se igualan en primer lugar los coeficientes de las ecuaciones [1] y [2]:

$$\left. \begin{aligned}2x - 3y + 4z &= 20 \\4x + 2y - 3z &= 11\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

Multiplicando la [1] por 2:

$$\left. \begin{aligned}4x - 6y + 8z &= 40 \\4x + 2y - 3z &= 11\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

Y restando ambas ecuaciones, cambiando los signos de los términos de la [2]:

$$\begin{array}{r}4x - 6y + 8z = 40 \\-4x - 2y + 3z = -11 \\ \hline 0 - 8y + 11z = 29\end{array}$$

Efectuando la misma operación con [1] y [3]:

$$\left. \begin{aligned}2x - 3y + 4z &= 20 \\3x + 4y + 2z &= 53\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [1] \\ [3] \end{array}$$

Multipliquemos la [1] por 3 y la [3] por 2:

$$\begin{aligned}6x - 9y + 12z &= 60 \\6x + 8y + 4z &= 106\end{aligned}$$

Y restando:

$$\begin{array}{r}6x - 9y + 12z = 60 \\-6x - 8y - 4z = -106 \\ \hline 0 - 17y + 8z = -46\end{array}$$

Agrupando las dos ecuaciones resultantes:

$$\begin{aligned}-8y + 11z &= 29 \\-17y + 8z &= -46\end{aligned}$$

Cambiando los signos de todos los términos:

$$\left. \begin{aligned}8y - 11z &= -29 \\17y - 8z &= 46\end{aligned} \right\}$$

obtenemos el mismo sistema de dos ecuaciones que con los anteriores métodos.

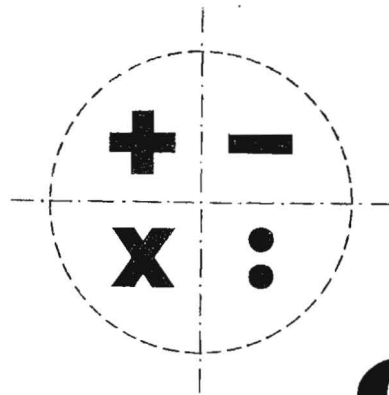
MATEMATICAS

Ecuaciones de segundo grado

Fórmulas

Raíces imaginarias

Problemas con ecuaciones
de primer grado



LECCION N^o 8

ALGEBRA

Lección octava

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita - Ecuaciones completas e incompletas - Fórmula de las ecuaciones de segundo grado Raíces imaginarias - Casos particulares de la fórmula general - Relaciones entre los coeficientes y las raíces - Resolución de las ecuaciones incompletas - Problemas resueltos de ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas - Problemas resueltos de ecuaciones de segundo grado

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Cuando en una ecuación la incógnita está afectada por el exponente 2, se denomina a aquélla ecuación de segundo grado. Su resolución se simplifica utilizando la denominada fórmula de las ecuaciones de segundo grado. Pero, antes de exponerla, veamos cómo es la forma general de esta clase de ecuaciones. Normalmente su primer miembro consta de tres términos ordenados según la incógnita. Recuerde que para ordenar un polinomio (puesto que, al fin y al cabo, el primer miembro no es otra cosa) se atiende al exponente de la letra ordenatriz, que en este caso será x . El exponente siempre ha de ir mayor o menor, y por tanto la forma será:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta es la fórmula de una ecuación completa de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las letras a , b y c son los coeficientes de la incógnita (las dos primeras) y una cantidad conocida (la tercera), denominada también término independiente. Representan cantidades positivas o negativas, enteras o fraccionarias, pero siempre conocidas.

Conviene que el primer término que contiene la potencia de la incógnita sea positivo. Si al plantear la ecuación resultara negativo bastará cambiar los signos de todos los términos.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 = 0$$

Estas son las expresiones representativas de las ecuaciones de segundo grado incompletas.

ECUACIONES COMPLETAS E INCOMPLETAS

La anterior fórmula se denomina *completa*, puesto que contiene los tres términos. Cuando falta el segundo o el tercer término, o ambos a la vez (el primer término no puede faltar nunca, puesto que es el que indica la clase de ecuación), la ecuación es *incompleta*. En este caso la fórmula puede reducirse a estas tres:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 = 0$$

FORMULA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Estudiaremos primero las ecuaciones completas. Sea la ecuación anterior

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como el término c es conocido, lo pasaremos al segundo miembro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multipliquemos ahora todos los términos por 4 veces el coeficiente de x^2 , o sea por $4a$:

$$4a(ax^2 + bx) = 4a(-c)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

Sumemos a cada miembro la cantidad b^2 :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

En todas estas operaciones el valor de la ecuación sigue siendo el mismo, puesto que hemos operado con las mismas cantidades para los dos miembros. El primer miembro de la última ecuación resulta ser el cuadrado del binomio $2ax + b$:

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

Como este primer miembro tiene raíz exacta, procederemos a extraer la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$\sqrt{4a^2x^2 + 4abx + b^2} = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

El \pm que precede a la raíz del segundo miembro indica que dicha raíz tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa, pero ambas del mismo valor absoluto, puesto que la cantidad que está bajo el radical puede ser la potencia de una misma base afectada del signo $+$ o del signo $-$. Recuerde que el cuadrado de cualquier cantidad, sea ésta positiva o negativa, es siempre positivo.

Pasando el término b del primer miembro al segundo:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Y finalmente, aislando la incógnita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta ecuación resultante, que da el valor de x , es la fórmula que antes citábamos. Gracias a ella se resuelven todos los problemas cuyo planteo sean ecuaciones completas de segundo grado con una incógnita. Según tomemos el signo $+$ o el $-$ que aparecen delante del radical tendremos dos raíces, a las que suele designarse con los símbolos x' y x'' .

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmulas que dan el valor de la incógnita en una ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$, en la que los coeficientes tienen los valores numéricos $a = 2$; $b = -7$ y $c = 3$.

Sustituyendo en la fórmula general los coeficientes literales por los numéricos, tendremos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - (4 \cdot 2 \cdot 3)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Con el signo $+$ la solución será:

$$x' = \frac{7 + 5}{4} \quad x' = 3$$

$$x'' = \frac{7 - 5}{4} \quad x'' = \frac{1}{2}$$

Las dos soluciones que se obtienen, en este caso 3 y $1/2$, satisfacen la condición expresada por la ecuación inicial:

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 7x + 3 = 0 & 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ (2 \cdot 3^2) - (7 \cdot 3) + 3 = 0 & (2 \cdot 0'5^2) - (7 \cdot 0'5) + 3 = 0 \\ 18 - 21 + 3 = 0 & 0'5 - 3'5 + 3 = 0 \end{array}$$

El término b^2 que figura en la cantidad subradical o radicando siempre es positivo, a pesar de que en la ecuación general el coeficiente sea $-b$, como ocurre en el ejemplo anterior, puesto que, como ya le había indicado, todas las cantidades elevadas al cuadrado son positivas.

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

La expresión que en la fórmula general de la ecuación de segundo grado queda afectada por la raíz, recibe el nombre de discriminante.

RAICES IMAGINARIAS

En la fórmula general la cantidad que se halla bajo el signo radical se denomina DISCRIMINANTE. Cuando este discriminante es igual o mayor que cero, la ecuación tiene raíces reales; en cambio, cuando es menor que cero, o sea igual a una cantidad negativa, la fórmula da una operación *imposible*. En este caso las raíces son denominadas *imaginarias*.

En la resolución de la ecuación $6x^2 + 3x + 2 = 0$ resulta, una vez efectuadas las operaciones de la fórmula general,

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-39}}{12}$$

En este caso, las raíces imaginarias serán:

$$x' = \frac{-3 + \sqrt{-39}}{12} \quad x'' = \frac{-3 - \sqrt{-39}}{12}$$

puesto que no hay ninguna cantidad cuyo cuadrado sea negativo. Aun en el caso de que la cantidad subradical tuviera raíz cuadrada exacta, por ejemplo $\sqrt{-36}$, la solución no da una cantidad real, sino que descomponiendo el radicando en

$$\sqrt{36 \times (-1)}$$

da el resultado $6\sqrt{-1}$, con lo que la cantidad sigue siendo imaginaria por existir el factor $\sqrt{-1}$.

CASOS PARTICULARES DE LA FORMULA GENERAL

Al plantear las ecuaciones de segundo grado, podemos hallarnos con la particularidad de que el coeficiente de x sea par, o bien que el coeficiente de x^2 sea la unidad. En ambos casos la fórmula queda simplificada.

Cuando el coeficiente de x es par, la fórmula queda reducida a

$$\sqrt{-b}$$

La raíz cuadrada de un número negativo será siempre una raíz imaginaria, porque...

$$(-c) \times (-c)$$

...será siempre un número positivo. No hay ninguna cantidad cuyo cuadrado sea negativo.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

en la que se han suprimido todos los factores numéricos, y siendo $b' = \frac{b}{2}$

$= \frac{b}{2}$, o sea, igual a la mitad del cociente de x .

En la ecuación $4x^2 - 8x - 12 = 0$, el coeficiente de x , 8, es par; y por tanto, utilizando la fórmula simplificada, haciendo $a = 4$; $b' = -8/2 = -4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - [4(-12)]}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - (-48)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{4} \quad x' = 3 \quad x'' = -1$$

En el segundo caso, en que el coeficiente de x^2 es la unidad, la fórmula general queda modificada de esta forma:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

En esta última se han dividido los dos términos del segundo miembro por 2. En la fórmula inicial queda suprimido el coeficiente a por ser igual a la unidad:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{4} =$$

puesto que $2 = \sqrt{4}$. Como en el segundo término numerador y denominador están radicados, equivale a radicar el quebrado completo:

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{4c}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Sea, por ejemplo, la ecuación $x^2 - 8x + 12 = 0$. Aplicando la fórmula anterior, tendremos

$$x = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 12}$$

$$x = -4 \pm 2$$

y las raíces son $x' = 6$; $x'' = 2$.

RELACIONES ENTRE LOS COEFICIENTES Y LAS RAICES

En todas las ecuaciones las dos raíces o soluciones cumplen con dos condiciones, que las relacionan directamente sea con los dos coeficientes, o con el término independiente de la incógnita y el coeficiente del término potenciado.

En el primer caso, la suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado, dividido por el coeficiente del primero, o sea que:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Y en el segundo caso el producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente de la incógnita dividido por el coeficiente del primero.

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Conocidas estas relaciones, constituyen un método muy sencillo para comprobar si las dos raíces halladas son las que cumplen con las condiciones precisas.

En el último caso anterior, en el que la ecuación era $x^2 - 8x + 12 = 0$ y las raíces $x' = 6$; $x'' = 2$, la suma de éstas debe ser igual al coeficiente $-b$ con el signo cambiado:

$$\begin{array}{ll} x' + x'' = +\frac{b}{a} & 6 + 2 = \frac{8}{1} = 8 \\ x' \cdot x'' = \frac{a}{c} & 6 \cdot 2 = \frac{12}{1} = 12 \end{array}$$

Por tanto, la solución es exacta.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS

Las ecuaciones incompletas del tipo...

$$ax^2 + c = 0$$

...se resuelven por esta fórmula:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

La fórmula general de las ecuaciones de segundo grado no es válida cuando la ecuación es incompleta, ya que entonces falta alguno de los coeficientes.

En la forma incompleta $ax^2 + c = 0$, por trasposición de términos obtenemos sucesivamente:

$$ax^2 + c = 0 \qquad ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esta última expresión es la fórmula para resolver cualquier ecuación de la forma incompleta citada. Si observa detenidamente, verá que esta fórmula da dos valores reales en el caso de que el término independiente

Lección n.º 8 de MATEMATICAS

FE DE ERRATAS

página	dice	debe decir
130	$4a^2\alpha^2 + 4ab\alpha = 4ac$ $4a^2\alpha^2 + 4ab\alpha + b\alpha^2 = b^2 - 4ac$	$4a^2\alpha^2 + 4ab\alpha = -4ac$ $4a^2\alpha^2 + 4ab\alpha + b^2 = b^2 - 4ac$
134	$\alpha', \alpha'' = \frac{a}{c}$ RESOLUCION DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS La fórmula general de las ecuaciones de segundo grado no es válida...	$\alpha', \alpha'' = \frac{c}{a}$ RESOLUCION DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS La fórmula general de las ecuaciones de segundo grado puede simplificarse...
135	$\alpha = \pm \sqrt{-\left(-\frac{16}{25}\right)} =$	$\alpha = \pm \sqrt{-\left(-\frac{16}{25}\right)} =$
138	$100 + 10y + \alpha + 198 = 100\alpha + 100y + z$	$100z + 10y + \alpha + 198 = 100\alpha + 10y + z$
140	$\alpha - 9 = 26$ (2.ª ecuación)	$\alpha + 9 = 26$

sea negativo ($-c$), puesto que de otra forma la solución sería imaginaria (con el factor $\sqrt{-1}$).

En la ecuación $25x^2 - 16 = 0$, aplicando la fórmula citada, tenemos:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$x = \pm \frac{4}{5} \quad x' = \frac{4}{5} \quad x'' = -\frac{4}{5}$$

Si la forma incompleta es $ax^2 + bx = 0$, entonces, aislando x como factor común del primer miembro, obtenemos:

$$x(ax + b) = 0$$

En este caso, el primer miembro es un producto de dos factores, x y $(ax + b)$. Cuando esto ocurre, y como su producto ha de ser 0, uno de los factores tiene que ser forzosamente 0. Igualando sucesivamente cada uno de los factores a 0, tenemos

$$x = 0 \quad ax + b = 0$$

La primera nos da una raíz $x' = 0$.

En la segunda, trasponiendo términos, tenemos:

$$ax + b = 0 \quad ax = -b \quad x = -\frac{b}{a}$$

Luego las raíces de estas ecuaciones incompletas son:

$$x' = 0 \quad x'' = -\frac{b}{a}$$

Sea por ejemplo la ecuación $x^2 - 4x = 0$. Serán

$$x' = 0 \quad x'' = -\left(-\frac{4}{1}\right) = 4$$

Sustituyendo en la ecuación incompleta inicial x , por sus dos valores hallados:

$$0^2 - (4 \cdot 0) = 0 \quad 4^2 - (4 \cdot 4) = 0$$

Una tercera forma de segundo grado incompleta, con la que quizás no se encuentre nunca, pero que citamos por ser curiosa, es $ax^2 = 0$.

En este caso, como el coeficiente no es nulo, ya que siempre es una cantidad conocida (que como mínimo es igual a la unidad), al despejar la incógnita queda:

$$x^2 = \frac{0}{a} \quad x = \sqrt{\frac{0}{a}} = \sqrt{0} = 0$$

Las ecuaciones de tipo...

$$ax^2 + bx = 0$$

...tienen dos soluciones:

$$x' = 0$$

$$x'' = -\frac{b}{a}$$

De donde resulta que $x' = 0$ y $x'' = 0$.

Luego la forma incompleta $ax^2 = 0$ tiene dos raíces iguales a 0, lo que no deja de ser una solución.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA O MAS INCOGNITAS

PRIMER PROBLEMA

En un montón hay 364 condensadores. Si aumentara en 6 condensadores electrolíticos y disminuyera en 5 condensadores cerámicos, el número de éstos sería 4 veces el de aquéllos. ¿Cuántos hay de cada clase?

Si llamamos x al número de condensadores electrolíticos, el de condensadores cerámicos será $364 - x$

Disminuyendo este número en 5 unidades $(364 - x) - 5$, aumentan los electrolíticos en 6 unidades $(x + 6)$, siendo en este momento 4 veces inferior al de los cerámicos. Por tanto, multiplicándolos por 4 su número se igualaría a éstos. En definitiva, la ecuación será:

$$(364 - x) - 5 = 4(x + 6)$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$364 - x - 5 = 4x + 24$$

Aislando los términos que contiene la incógnita en el primer miembro:

$$-x - 4x = 24 - 364 + 5$$

$$-5x = -335$$

$$335$$

$$x = \frac{\quad}{5}$$

$$x = 67$$

Por tanto, los condensadores electrolíticos son 67

Los cerámicos serán, pues, $(364 - x) = (364 - 67) = 297$

SEGUNDO PROBLEMA

Un galgo persigue a una liebre que está a 30 metros de distancia. Si el galgo recorre 5 metros por segundo y la liebre sólo 3 metros, ¿cuánto tardará en alcanzarla?

Sea x el tiempo que ha de pasar para que el galgo alcance a la liebre. Cuando esto ocurra, el galgo habrá recorrido $5x$ metros y la liebre $3x$ metros. Como, según el problema, la diferencia de estos espacios es de 30 metros podemos escribir la ecuación,

$$5x - 3x = 30$$

$$2x = 30$$

$$30$$

$$x = \frac{\quad}{2}$$

$$x = 15$$

El galgo tardará 15 segundos en alcanzar a la liebre.

TERCER PROBLEMA

Cuatro cuadros se compraron por 8.000 pesetas. El precio del segundo fue vez y media el del primero; el tercero, vez y media el del segundo, y el cuarto costó tanto como el primero y tercero juntos. ¿A qué precio resultó cada uno?

Designemos el precio del primero por x .

El del segundo fue:

$$x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$$

El del tercero:

$$\frac{3x}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{12x}{8} + \frac{6x}{8} = \frac{18x}{8} = \frac{9x}{4}$$

Y el del cuarto:

$$x + \frac{9x}{4} = \frac{13x}{4}$$

La ecuación, por tanto, será:

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{9x}{4} + \frac{13x}{4} = 8000$$

Resolviendo ésta tendremos:

$$\text{m.c.m.} = 4$$

$$4x + 6x + 9x + 13x = 32000$$

$$32x = 32000$$

$$x = \frac{32000}{32}$$

$$x = 1000$$

El primer cuadro costó, pues,

1.000 pesetas

$$\text{El segundo: } \frac{3x}{2} = \frac{3000}{2} =$$

1.500 »

$$\text{El tercero: } \frac{9x}{4} = \frac{9000}{4} =$$

2.250 »

$$\text{Y el cuarto: } \frac{13x}{4} = \frac{13000}{4} =$$

3.250 »

CUARTO PROBLEMA

¿Cuántos discos de 20 y 25 milímetros se necesitan alinear para obtener la longitud de 1 metro con 48 de ellos?

Sea x el número de discos de 20 mm y $48 - x$ el número de los de 25 milímetros. Al mismo tiempo, como 1 metro tiene 1.000 mm, podemos formar la siguiente ecuación:

$$20x + 25(48 - x) = 1000$$

Resolviendo esta ecuación, obtendremos

$$20x + 1200 - 25x = 1000$$

$$5x = 200$$

$$200$$

$$x = \frac{\quad}{5}$$

$$x = 40$$

Por tanto, se necesitan 40 discos de 20 mm y 8 de 25 mm, ya que

$$48 - x = 48 - 40 = 8$$

En los siguientes problemas, con varias incógnitas, verá que para resolverlos empleamos un método distinto en cada uno de ellos; aunque puede aplicarse indistintamente uno cualquiera para hallar la solución exacta.

QUINTO PROBLEMA

Un número entero consta de tres cifras, cuya suma es igual al triple de la cifra de las decenas. Hallar ese número, sabiendo que disminuye en 198 si se invierte el orden de sus cifras, y que la cifra de las unidades es la mitad de la que representa las centenas.

Emplearemos en este problema el método de sustitución.

Según el primer enunciado, la suma de los valores de las tres cifras es igual a

$$x + y + z = 3y$$

La segunda ecuación será:

$$100z + 10y + x + 198 = 100x + 10y + z$$

Y la tercera ecuación vendrá dada en:

$$z = \frac{x}{2}$$

Reduzcamos los términos semejantes en la segunda ecuación:

$$99z - 99x = -198$$

$$99x - 99z = 198$$

Como en la tercera ecuación tenemos el valor de z , con respecto a x , sustituyéndolo en esta última

$$99x - 99 \left(\frac{x}{2} \right) = 198$$

Multiplicando todos los términos por 2, suprimiendo así el denominador:

$$198x - 99x = 396$$

$$99x = 396$$

$$x = \frac{396}{99}$$

$$x = 4$$

Reduciendo los términos semejantes en la primera ecuación:

$$x + z = 2y$$

$$\text{Siendo el valor de } x = 4; z = \frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$4 + 2 = 2y$$

$$6 = 2y$$

$$y = \frac{6}{2} \quad y = 3$$

El número pedido es, pues, 432.

SEXTO PROBLEMA

La suma de dos números es 26 y su diferencia 8. ¿Cuáles son?

Representaremos el mayor por x ; el menor por y . Podemos formar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

que resolveremos por el método de reducción.

Primeramente cambiamos todos los signos de la segunda ecuación para poder restarlas:

$$\begin{array}{r} x + y = 26 \\ -x + y = -8 \\ \hline 0 \quad 2y = 18 \\ 18 \\ y = \frac{18}{2} \quad y = 9 \end{array}$$

Sustituyendo el valor de y, tenemos:

$$\begin{aligned}x + y &= 26 \\x - 9 &= 26 \\x &= 26 - 9 \quad x = 17\end{aligned}$$

Los números pedidos son 17 y 9.

SEPTIMO PROBLEMA

Dice Pablo a Emilio: «Si me das 40 pesetas tendré lo que a ti te queda multiplicado por 28.» «Dame 95 pesetas, repuso Emilio, y tendremos igual los dos.» ¿Cuánto tiene cada uno?

Por el método de comparación o igualación:

Pablo tiene x pesetas, Emilio, y pesetas. La primera ecuación será

$$\begin{array}{l} \text{y la segunda} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} x + 40 &= 28(y - 40) \\ y + 95 &= x - 95 \end{aligned} \right\}$$

Aislando las incógnitas en las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x - 28y &= -1120 - 40 \\ y - x &= -95 - 95 \end{aligned} \right\}$$

Cambiando los signos en la segunda ecuación y aislando la incógnita x en las dos:

$$\begin{aligned}x &= 28y - 1160 \\x &= 190 + y\end{aligned}$$

Igualando ecuaciones, se obtiene sucesivamente:

$$\begin{aligned}28y - 1160 &= 190 + y \\28y - y &= 1160 + 190 \\27y &= 1350\end{aligned}$$

$$y = \frac{1350}{27} \quad y = 50$$

$$x = 190 + 50 \quad x = 240$$

Pablo tiene 240 pesetas y Emilio 50.

OCTAVO PROBLEMA

Hallar dos números cuya suma y cociente es 7.

La primera ecuación será

$$\begin{array}{l} \text{y la segunda} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} x + y &= 7 \\ \frac{x}{y} &= 7 \end{aligned} \right\}$$

x valdrá: $x = 7y$ en la segunda ecuación.

Sustituyendo este valor en la primera,

$$7y + y = 7$$

$$8y = 7$$

$$y = \frac{7}{8}$$

$$x = 7 \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{49}{8}$$

obtenemos los números pedidos, que son $\frac{49}{8}$ y $\frac{7}{8}$

NOVENO PROBLEMA

Un terreno rectangular de 240 metros de perímetro tiene sus dimensiones en la razón de 2 a 3. ¿Cuál es su área?

Denominando a su anchura x , a su longitud y , su suma será igual al semiperímetro. Así:

$$x + y = \frac{240}{2} = 120$$

Como a su vez la condición es que sus dimensiones estén en la relación 2 a 3,

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

el sistema de ecuaciones será

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Despejando x en la segunda ecuación:

$$x = \frac{2y}{3}$$

y sustituyendo este valor en la primera ecuación,

$$\frac{2y}{3} + y = 120$$

$$2y + 3y = 360$$

$$5y = 360$$

$$y = \frac{360}{5} \quad y = 72$$

$$x = \frac{2y}{3} = \frac{2 \cdot 72}{3} \quad x = 48$$

hallamos finalmente $x = 48$; $y = 72$

El área del terreno es: $48 \cdot 72 = 3456 \text{ m}^2$.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

DECIMO PROBLEMA

La longitud de una sala rectangular de 240 m^2 de área excede en 6 m a la anchura. ¿Qué dimensiones tiene?

Si x es el lado menor, el mayor será $x + 6$. Se tiene

$$x(x + 6) = 240$$

$$x^2 + 6x = 240$$

$$x^2 + 6x - 240 = 0$$

Aplicando la fórmula completa reducida, por ser par el coeficiente x ,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\text{Siendo } b' = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (-240)}}{1}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9 + 240}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{249}$$

$$x = -3 \pm 15'78$$

$$x' = -3 + 15'78$$

$$x' = 12'78$$

Las dimensiones son: $12'78 \text{ m}$ y $12'78 + 6 = 18'78 \text{ m}$.

UNDECIMO PROBLEMA

Si por 2 pesetas diesen 5 resistencias más de las que dan, la docena costaría 40 céntimos menos. ¿Cuánto vale cada resistencia?

Sea x céntimos el valor de una resistencia; el de la docena será, por tanto, $12x$. A su vez 2 pesetas es igual a 200 céntimos y por dicho importe

nos darán $\frac{200}{x}$ resistencias. Si nos dieran 5 más, o sea $\frac{200}{x} + 5$ el valor de cada una sería entonces

$$\frac{200}{\frac{200}{x} + 5}$$

y la docena costaría

$$\frac{12 \cdot 200}{\frac{200}{x} + 5}$$

Luego la ecuación es

$$\frac{12 \cdot 200}{\frac{200}{x} + 5} + 40 = 12x$$

Resolviendo ésta tenemos

$$\frac{2400}{5x + 200} + 40 = 12x \quad \frac{2400x}{5x + 200} + 40 = 12x$$

x

$$2400x + 200x + 8000 = 60x^2 + 2400x$$

$$60x^2 - 200x - 8000 = 0$$

Efectuada la ecuación de segundo grado a que da lugar, resulta

$$x = \frac{200 \pm \sqrt{200^2 + (4 \cdot 60 \cdot 8000)}}{2 \cdot 60} = \frac{200 \pm 1400}{120}$$

$$x' = \frac{160}{12} = \frac{40}{3} = 13'33 \text{ céntimos}$$

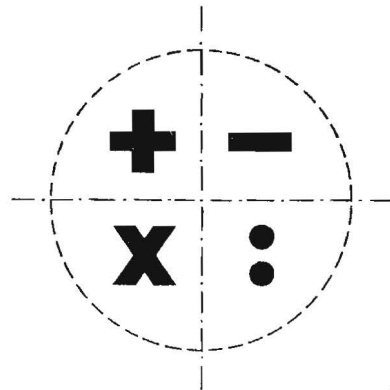
de donde resulta finalmente que $x = \frac{40}{3}$ céntimos, o también 13'33 céntimos.

MATEMÁTICAS

Logaritmos

**Estudio y práctica de los
logaritmos decimales**

Tablas de logaritmos



LECCION N^o 9

MATEMATICAS

Lección novena

LOGARITMOS

DEFINICION Y OPERACIONES. TABLAS

Definición — Logaritmos, ¿porqué? — Características y mantisa — Tablas de logaritmos — Ejemplos — Operaciones con logaritmos — Multiplicación — División — Potenciación — Algunas operaciones como ejemplo.

DEFINICION

Entendemos por logaritmo de un número...

EL EXPONENTE A QUE DEBE ELEVARSE UNA DETERMINADA BASE PARA OBTENER DICHO NÚMERO.

Aclaremos esta definición, que en principio puede parecer más complicada de lo que es en realidad.

Supongamos que elegimos por base el número 2. En este caso, ¿cuál será el logaritmo de 8?

El logaritmo de base 2 del número 8 será el exponente a que debemos elevar la base (2) para obtener el número 8. En este caso podemos escribir:

Logaritmo (base 2) de $8 = 3$.

Es así por cuanto $2^3 = 8$.

De acuerdo con la misma definición, el logaritmo de base 2 del número 16 sería 4, ya que $2^4 = 16$.

Puede establecerse un sistema de logaritmos con cualquier base, pero lo normal es trabajar con logaritmos de base 10, denominados LOGARITMOS VULGARES, DE BRIGGS O DECIMALES.

Existe aún otro sistema, que tiene por base el llamado *número e* ($2.71828...$), sistema que recibe el nombre de *logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos*.

Este segundo sistema, empero, no vamos a considerarlo. Damos noticia de su existencia y nada más. Para cálculos normales utilizaremos logaritmos vulgares, de comprensión mucho más fácil.

Para indicar que una cierta expresión numérica es el logaritmo vulgar de un determinado número a , se utiliza la expresión,

$\log. a$

y en caso de tratarse de un logaritmo neperiano,

$\log_e a$, o bien $\ln . a$

Repetimos que lo más usual es trabajar con logaritmos vulgares y que serán éstos los que nosotros vamos a considerar.

LOGARITMOS, ¿POR QUÉ?

Siendo el logaritmo de un número el exponente a que debe elevarse la base del sistema para obtener dicho número, es evidente que el logaritmo vulgar de 10 (logaritmo de base 10) será la unidad, puesto que $10^1 = 10$.

Podemos escribir:

$$\log 10 = 1$$

Por la misma razón, será:

$$\log 100 = 2$$

$$(10^2 = 100)$$

$$\log 1000 = 3$$

$$(10^3 = 1000)$$

$$\log 10.000 = 4$$

$$(10^4 = 10.000)$$

Podríamos seguir por el mismo camino,

$$\log 1.000.000 = 6$$

viendo que el logaritmo de la unidad seguida de ceros (las potencias de 10) es siempre el número entero que indica la cantidad de ceros.

Por otra parte, sabemos que todo decimal puede expresarse en forma de quebrado. Por ejemplo:

$$0'1 = \frac{1}{10}$$

La expresión $1/10$ ¿no equivale a 10^{-1} ? Sabemos, en efecto que el exponente negativo indica división.

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0'1$$

Deducimos, pues, que:

$$\log 0'1 = -1, \text{ puesto que } 0'1 = 10^{-1}$$

Por extensión, los logaritmos las demás potencias negativas de 10 serán

$$\log 0'01 = -2, \text{ puesto que } 0'01 = 10^{-2}$$

$$\log 0'001 = -3, \text{ puesto que } 0'001 = 10^{-3}$$

$$\log 0'0001 = -4, \text{ puesto que } 0'0001 = 10^{-4}$$

De estas primeras deducciones éntresacamos una conclusión importante:

TODOS LOS NÚMEROS COMPRENDIDOS ENTRE 0 Y + 1, o sea, todos los decimales sin parte entera, TIENEN LOGARITMO NEGATIVO.

EL LOGARITMO DE CUALQUIER NÚMERO MAYOR QUE 1 ES POSITIVO.

Es importante observar, cuando nos referimos a logaritmos negativos o a logaritmos positivos, que *es un logaritmo lo que está afectado por el signo más o el signo menos*, no el número al que pertenece. El logaritmo de un decimal inferior a 1 es negativo (lo acabamos de decir); pero dicho número decimal es positivo.

En realidad, *los números negativos no tienen logaritmo*, puesto que son inferiores a cero. Sin embargo, ya veremos el sistema de poder operar con ellos.

Ahora que ya tenemos una idea más clara de lo que es el logaritmo

de un número, podemos preguntarnos cuál es la utilidad de este invento matemático.

Los logaritmos solucionan con mayor facilidad cálculos en que intervienen productos, cocientes, potencias y raíces, y que con un proceso operativo normal nos llevarían a trabajar con expresiones complicadas y largas.

Operando con logaritmos, una multiplicación queda reducida a una suma; una división se convierte en una resta; una potenciación consiste en una sola multiplicación, y una radicación en una división sencilla.

Se comprende que los logaritmos representen una notable ventaja cuando se trata de operar con números de muchas cifras.

CARACTERISTICA Y MANTISA

Hemos dejado bien sentado que en el sistema de los logaritmos vulgares se cumple que:

$$\log 10 = 1$$

Esto es así, insistimos en ello, por cuanto $10^1 = 10$. Aferrándonos de nuevo en la definición de logaritmo, llegaremos a la conclusión de que:

$$\log 1 = 0$$

¿Por qué...? Por la única razón de ser $10^0 = 1$.

En principio, pues, todos los números comprendidos entre 1 y 10 tendrán un logaritmo que deberá caracterizarse por empezar por el número 0 (cero). El valor de este logaritmo debe quedar comprendido entre cero y uno, lo cual quiere decir que tendrá la expresión de un número decimal:

0'... algo.

Si el número cuyo logaritmo buscamos está comprendido entre 10 y 100, es evidente que su expresión será:

1'... algo.

puesto que $\log 10 = 1$ y $\log 100 = 2$.

De igual forma, el logaritmo de todo número comprendido entre 100 y 1000 empieza con un 2 al que siguen infinitas cifras decimales.

A LA PARTE ENTERA DE UN LOGARITMO SE LE LLAMA CARACTERÍSTICA.

La característica del logaritmo de un número es la cifra que expresa el número de cifras enteras de dicho número, menos una.

LA PARTE DECIMAL DEL LOGARITMO DE UN NÚMERO SE LLAMA MANTISA. Está formada por infinitas cifras (es un número irracional), de las que, normalmente, sólo se toman cinco o menos. Con cuatro es suficiente para la gran mayoría de cálculos.

De acuerdo con esto, la característica del $\log 34763$ será 4; la del $\log 372'575$ será 2, etc.

TABLAS DE LOGARITMOS

Los logaritmos de los números se dan en las llamadas tablas de logaritmos, donde, de una u otra forma, se relaciona el número cuyo logaritmo deseamos conocer con la mantisa del mismo. La característica

del logaritmo nunca aparece en estas tablas, puesto que siempre es la cantidad de cifras enteras menos una.

Las mantisas es lo que dan las tablas, que serán más o menos volu-
minosas según la cantidad de números que contengan y el mayor o me-
nor número de cifras decimales con que se hayan calculado las mantisas.

Las tablas de logaritmo que incluimos en esta lección son extrema-
damente sencillas y cumplen de modo perfecto su misión. Los cálculos
que normalmente requieren el empleo de los logaritmos, dentro del cam-
po de la técnica aplicada, no requieren mayor aproximación de la que
proporcionan estas tablas.

Explicuemos su manejo:

1.º Estas tablas proporcionan directamente la mantisa de los núme-
ros enteros desde el 10 al 100. Los números, como puede ver, se encuen-
tran en la primera columna (N), y la mantisa que les corresponde queda
en su misma línea en la columna del cero.

Ejemplo:

Buscar el log de 48.

En la columna N localizamos el número 48; y en la columna inme-
diata (0), en la fila correspondiente al 48, leemos la mantisa, que resulta
ser 6812. Luego:

$$\log 48 = 1'6812$$

2.º La mantisa del logaritmo de los números con tres cifras significa-
tivas se encuentra en la columna que corresponde a la tercera cifra que
completa el número, cuyas dos primeras cifras son las que se leen en
la columna N.

Ejemplo:

Buscar el log de 813.

En la columna N buscamos el número 81 (dos primeras cifras signi-
ficativas) y, sin movernos de la misma fila, localizamos la mantisa si-
tuada en la columna 3.

Vemos que dicha mantisa es 9096. Luego:

$$\log 813 = 2'9096$$

Otro ejemplo:

Buscar el log de 230.

La última cifra de este número es un cero, por lo cual la mantisa
de su logaritmo será la misma que corresponde al log 23. que es 3617.
En consecuencia:

$$\log 230 = 2'3617$$

4.º El número tiene cuatro cifras significativas. En este caso se bus-
ca la mantisa correspondiente a las tres primeras cifras, a la cual se
suma la cantidad que se encuentra en una de las nueve últimas colum-
nas de la tabla. Estas cifras son lo que se llama la diferencia tabular,
o sea, la diferencia existente entre dos mantisas consecutivas de dos
números de tres y cuatro cifras significativas que tienen las tres prime-
ras iguales y según que la cuarta sea 1, 2, 3, 4...9.

Aclaremos la cuestión con algunos ejemplos.

Ejemplo primero:

Buscar el log de 2474.

Empezaremos por buscar la mantisa del log de 247:

$$\text{Mantisa del log } 247 = 3927$$

Handwritten calculations showing the difference table method:
$$\begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 150 \\ \hline 275 \end{array}$$

Below this, there are several small calculations: $5^5 \cdot 5^5 = 5^{10}$, and some other numbers like 25, 40, 25, 15.

Existe una cuarta cifra significativa (4) que incrementa la mantisa. Para saber el valor de este incremento, buscaremos en la misma fila del 24 el número que corresponde a la columna 4 de las diferencias tabulares. Vemos que este número es el 7.

Luego, la mantisa del log 2474 será:

$$3927 + 7 = 3934$$

Podemos escribir:

$$\log 2474 = 3.3934$$

Segundo ejemplo:

Buscar el log de 34'05

Hallaremos la mantisa del log 340:

Mantisa del log 340 = 5315.

La diferencia tabular correspondiente a la columna del 5 y a la fila del 34 es 6.

Luego:

$$\text{Mantisa del log } 34'05 = 5315 + 6 = 5321.$$

$$\text{Log } 34'05 = 1.5321$$

Tercer ejemplo:

Buscar el log de 0'04327.

Como siempre, hallaremos la mantisa del log 432.

Mantisa del log 432 = 6345.

Diferencia tabular entre mantisa de 432 y mantisa de 4327 es 7.

Mantisa del log 4327 = 6345 + 7 = 6352.

Luego:

$$\log 0'04327 = \bar{2}.6352$$

Recuerde que el logaritmo de los números positivos comprendidos entre 0 y 1 es negativo. Observe que el signo menos se coloca sobre la característica. Inmediatamente veremos el motivo.

OPERACIONES CON LOGARITMOS

Hemos dicho que los logaritmos simplificaban las operaciones aritméticas cuando la índole de las mismas nos llevaba a operar con demasiadas cifras.

Veamos, pues, cómo se cumple esta ventaja:

MULTIPLICACION. ANTILOGARITMO

Partiendo de la definición de logaritmo, podemos afirmar que si la base 10 se eleva a un exponente que es el logaritmo de un número, el resultado es dicho número.

Así, por ejemplo, siendo el $\log 450 = 2.6532$, debe cumplirse que:

$$10^{2.6532} = 450$$

Por otra parte, sabemos que para multiplicar potencias de la misma base basta con sumar sus exponentes conservando dicha base.

$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$$

¿No son los exponentes de base 10 el logaritmo de un número?

Se cumple, en efecto que $2 = \log 100$ y que $3 = \log 1000$.

Deducimos, pues que 100×1000 es un producto que podemos hallar así:

$$\log 100 + \log 1000 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{antilog } 5 = 100.000$$

$$2478 \quad a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b$$

En efecto:

Para multiplicar dos o más números, basta con sumar sus logaritmos y hallar luego el antilogaritmo del resultado de la suma.

Entendemos por antilogaritmo de un número, aquel número al que corresponde el logaritmo considerado.

Para buscar el antilogaritmo de un logaritmo procederemos del modo siguiente. Véalo por medio de un ejemplo:

Nos proponemos hallar el antilog 2'6503.

1.º Buscamos en la tabla la mantisa que más se aproxima: 6503. En la columna 7 vemos que figura exactamente dicha mantisa y que corresponde al número 44.

Como la característica es 2, tendremos que
 $\text{antilog } 2'6503 = 447$

Pero es normal que no encontremos una mantisa exacta. Supongamos que buscamos el antilog 2'6519.

En este caso, la mantisa más aproximada es 6513, correspondiente a la columna 8 y al número 44. En principio se tratará del número 448... y algo más, puesto que hay una diferencia tabular de $6519 - 6513 = 6$.

2.º Buscamos la diferencia tabular en la misma fila del número 44 viendo a qué columna corresponde. En nuestro caso es la columna 6 de las diferencias tabulares. Esta cantidad debe añadirse al antilogaritmo dado directamente por las tablas.

Será:

$$\text{antilog } 2'6519 = 448'6$$

Al efectuar una multiplicación por logaritmos pueden darse dos casos:

a) TODAS LAS CARACTERÍSTICAS SON POSITIVAS.

En este caso se suman normalmente mantisas y características.

Ejemplo:

Efectuar la multiplicación siguiente:

$$3696 \times 965'4 \times 1'817$$

Solución:

$$\text{Log } 3696 \times 965'4 \times 1'817 = \text{log } 3696 + \text{log } 965'4 + \text{log } 1'817.$$

$$\text{Log } 3696 = 3'5677$$

$$\text{Log } 965'4 = 2'9847$$

$$\text{Log } 1'817 = 0'2593$$

$$\text{Suma} = 6'8117$$

$$\text{Antilog } 6'8117 = 6.482.000 \text{ aproximadamente}$$

Tenga en cuenta que el resultado siempre será aproximado.

b) HAY CARACTERÍSTICAS NEGATIVAS.

En este caso se opera por separado con características y mantisas.

Ahora comprenderá por qué el signo negativo sólo afecta la característica del logaritmo.

Una característica negativa indica el número de ceros que siguen a la derecha de la coma, menos uno.

Que el signo menos se coloque encima de la característica se debe la razón siguiente:

No debe interpretarse que todo el logaritmo es negativo. La característica puede ser o no negativa; pero

la mantisa es siempre positiva.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente operación indicada:

$$352 \times 710'5 \times 0'139$$

Solución:

$$\begin{aligned} \log 352 \times 710'5 \times 0'139 &= \log 352 + \log 710'5 + \log 0'139 = \\ &= 3'5492 + 2'8516 + \bar{1}'1430 \end{aligned}$$

$$\text{Suma de características} = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Suma de mantisas:

$$0'5492$$

$$0'8516$$

$$0'1430$$

$$1'5438$$

$$\log \text{ buscado} = 4 + 1'5438 = 5'5438$$

En consecuencia:

$$352 \times 710'5 \times 0'139 = \text{antilog } 5'5438 = 349.800 \text{ aprox.}$$

DIVISION

El cociente de dos números equivale al antilogaritmo de la resta de sus respectivos logaritmos.

Es así por cuanto el cociente de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia de igual base y cuyo exponente es la diferencia de exponentes:

$$10^9 : 10^3 = 10^{9-3}, \text{ o lo que es lo mismo,}$$

$$\log 1.000.000.000 = 9$$

$$\log 1000 = 3.$$

Por tanto:

$$\log 1.000.000.000 : 1.000 = 9 - 3 = 6$$

$$\text{antilog. } 6 = 1.000.000$$

Al restar los logaritmos pueden presentarse varios casos:

1.º EL MINUENDO ES MAYOR QUE EL SUSTRAENDO.

En este caso se procede a restar normalmente los dos logaritmos:

$$\log a = 3'5031$$

$$\log b = 1'3751$$

$$\log a : b = 2'1280$$

2.º EL SUSTRAENDO TIENE CARACTERÍSTICA NEGATIVA.

De acuerdo con la regla de los signos, se restan las mantisas normalmente (las mantisas son siempre positivas) y se «suman» las características.

$$\log a = 5'3782$$

$$\log b = \bar{2}'2693$$

El planteo de la operación sería:

$$\log a : b = 5'3782 - \bar{2}'2693 = 5 - (-2) + (0'3782 - 0'2693)$$

Tenemos la expresión $5 - (-2)$, que, de acuerdo con la regla de los signos, es:

$$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$$

Por eso decimos que en este caso se «suman» las características y se restan las mantisas.

$$\log a = 5'3782$$

$$\log b = \bar{2}'2693$$

$$\log a : b = 7'1089$$

3.º EL MINUENDO Y EL SUSTRANDO TIENEN CARACTERÍSTICAS NEGATIVAS.

En este caso se restan por separado mantisas y características, teniendo en cuenta que la característica del sustraendo debe cambiarse de signo.

$$\log a = \bar{4}'3724$$

$$\log b = \bar{3}'2792$$

$$\log a : b = \bar{4} - (-3) + (0'3724 - 0'2792) = \bar{4} + \bar{3} + 0'0932 = 1'0932$$

Vea un caso en el cual la mantisa del sustraendo es mayor que la del minuendo:

$$\text{Sea } \log a = 5'2392$$

$$\log b = 4'9763$$

Procedemos a restar por separado características y mantisas.

$$-5 - (-4) = -5 + 4 = -1$$

$$0'2392 - 0'9763 = \bar{1}'2629$$

Luego:

$$\log a : b = 5'2392 - 4'9763 = -1 + \bar{1}'2629 = \bar{2}'2629$$

4.º EL SUSTRANDO ES MAYOR QUE EL MINUENDO, TENIENDO AMBOS CARACTERÍSTICAS POSITIVA.

El resultado será un logaritmo con característica negativa:

$$\log a = 3'8576$$

$$\log b = 5'2857$$

$$\log a : b = \bar{2}'5719$$

Es así por cuanto $3 - 5$ es igual a -2 .

5.º EL MINUENDO TIENE CARACTERÍSTICA NEGATIVA Y EL SUSTRANDO CARACTERÍSTICA POSITIVA.

El resultado será un logaritmo con característica negativa.

$$\log a = \bar{3}'7293$$

$$\log b = 4'9652$$

$$\log a : b = \bar{3}'7293 - 4'9652 = (3 - 4) + (0'7293 - 0'9652)$$

Operando por separado:

$$-3 - 4 = -7$$

$$0'7293 - 0'9652 = \bar{1}'7641$$

Luego:

$$\log a : b = -7 + \bar{1}'7641 = \bar{8}'7641$$

POTENCIACION

Potenciar un número no es más que multiplicarlo por sí mismo un número de veces igual al exponente de la potencia. Y puesto que la multiplicación de dos números se resuelve sumando sus logaritmos,

potenciar un número equivale a tomar su logaritmo por sumando tantas veces como indique el exponente de la potencia.

Por ejemplo:

$$5^2 = 5 \times 5$$

$$\log 5^2 = \log. 5 + \log 5$$

o, lo que es lo mismo

$$\log 5^2 = 2 \times \log 5$$

En resumen:

Para potenciar un número, basta multiplicar su logaritmo por el exponente, hallando después el antilogaritmo del resultado.

Al potenciar un número logarítmicamente, podemos encontrarnos con los siguientes casos:

1.º EL LOGARITMO DE LA BASE ES POSITIVO Y EL EXPONENTE TAMBIÉN LO ES.

En este caso se procede como si fuese una operación normal.

Sea, por ejemplo, la expresión a^5 cuando $\log a = 3'1203$.

$$\log a^5 = \log a \times 5 = 3'1203 \times 5 = 15'6015$$

2.º LA CARACTERÍSTICA DEL LOGARITMO DE LA BASE ES NEGATIVA Y EL EXPONENTE ES NEGATIVO.

Se multiplican por separado característica y mantisa.

Por ejemplo:

Sea la expresión a^5 cuando $\log a = \bar{4}'3022$

$$\log a^5 = \log a \times 5 = \bar{4}'3022 \times 5$$

$$4'3022 \times 5 = (-4 \times 5) + (0'3022 \times 5) = -20 + 1'5110 = \bar{19}'5110$$

3.º EL LOGARITMO DE LA BASE TIENE CARACTERÍSTICA POSITIVA Y EL EXPONENTE ES NEGATIVO.

Obtendremos un logaritmo negativo.

Sea la expresión a^{-2} , cuando $\log a = 2'3022$.

$$\log a^{-2} = \log a \times (-2) = 2'3022 \times -2 = -4'6044$$

Pero sabemos que la mantisa de un logaritmo no puede ser negativa. Por tanto, el resultado obtenido no es válido y se debe recurrir a lo que se llama complemento o *cologaritmo*, que se obtiene añadiendo al logaritmo **positivo** una unidad positiva y otra negativa que, naturalmente no alterarán el valor ($1 - 1 = 0$).

Operaremos de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \text{colog } -4'6044 &= +1 - 1 - 4'6044 = 1 - 0'6044 + (-1 - 4) = \\ &= 5 + 0'3956 = \bar{5}'3956 \end{aligned}$$

Observe que la mantisa se resta de la unidad positiva añadida, mientras que la característica se suma a la unidad negativa.

4.º LA CARACTERÍSTICA DEL LOGARITMO DE LA BASE ES NEGATIVA Y EL EXPONENTE TAMBIÉN.

Se procede por separado con mantisa y característica.

Sea a^{-3} cuando $\log a = \bar{5}'3022$

$$\begin{aligned} \log a^{-3} &= \log a \times -3 = \bar{5}'3022 \times -3 = \\ &= (-5 \times -3) + (0'3022 \times -3) = \\ &= +15 + (-0'9066) \end{aligned}$$

Observemos que estaríamos ante una mantisa negativa, cosa que no puede ser. Por tanto, quitamos una unidad de la característica y la añadimos a la mantisa. Así:

$$\begin{aligned}\log a^{-3} &= 15 + (-0'9066) = 14 + (1 - 0'9066) = \\ &= 14 + 0'0934 = 14'0934\end{aligned}$$

RADIACION

Es en esta operación donde la ventaja de los logaritmos es más notoria. En efecto: gracias a ellos es posible obtener raíces de cualquier orden, porque:

La raíz de orden n de cualquier número se obtiene dividiendo el logaritmo de dicho número por el índice de la raíz, hallando luego el antilogaritmo del resultado.

Así, por ejemplo, la $\sqrt{4}$ puede obtenerse dividiendo por 2 el $\log 4$.

$$\log \sqrt{4} = \log 4 : 2$$

$$\log 4 = 0'6021$$

$$\log \sqrt{4} = 0'6021 : 2 = 0'3010$$

Por tanto:

$$\sqrt{4} = \text{antilog } 0'3010 = 2$$

La operación anterior no tiene objeto, puesto que todos sabemos que $\sqrt{4} = 2$. Pero suponga que en un cálculo aparece esta expresión: $\sqrt[8]{372}$.

$$\log \sqrt[8]{372} = \log 372 : 8 = 2'5705 : 8 = 0'3213$$

$$\sqrt[8]{372} = \text{antilog } 0'3213 = 2'096$$

La división de un logaritmo por un número se efectúa normalmente, considerando al logaritmo como un número decimal.

Sólo en el caso de que la característica sea negativa y no sea múltiplo del divisor, deberemos operar con una innovación. En este caso añadiremos a la característica tantas unidades negativas como sean necesarias para obtener el primer múltiplo del divisor. A la mantisa le sumaremos el mismo número de unidades positivas, con lo cual el logaritmo no variará, puesto que se anularán ambas cantidades.

Luego dividiremos por separado característica y mantisa.

Por ejemplo:

Sea la expresión $\sqrt[4]{a}$, cuando $\log a = \bar{5}'3027$

$$\log \sqrt[4]{a} = \log a : 4 = \bar{5}'3027 : 4$$

$$\bar{5}'3027 : 4 = ((5 + 3) + (3 + 0'3027)) : 4 =$$

$$= \frac{\bar{8} + 3'3027}{4} = \bar{2} + 0'8257 = \bar{2}'8257$$

ALGUNAS OPERACIONES COMO EJEMPLO

Para dejar bien sentado que el cálculo logarítmico puede representar una ventaja enorme para la solución de determinados planteos matemáticos, añadimos algunos ejemplos que cerrarán la lección. Siga con nosotros el proceso operativo e intente solucionar las mismas operaciones con el proceso aritmético normal. Verá la diferencia; y verá

también que sin los logaritmos algunas de estas operaciones son irrealizables.

1. Efectuar la siguiente operación.

$$\frac{321 \times 823 \times 421}{560 \times 271 \times 32} = A$$

Solución:

$$\log 321 = 2'5065$$

$$\log 823 = 2'9154$$

$$\log 421 = 2'6243$$

$$\log \text{ del numerados} = 8'0462$$

$$\log 560 = 2'7482$$

$$\log 271 = 2'4330$$

$$\log 32 = 1'5051$$

$$\log \text{ del denominador} = 6'6863$$

$$\log A = 8'0462 - 6'6863 = 1'3599$$

$$A = \text{antilog de } 1'3599 \approx 22'9$$

2. Efectuar la operación que se indica:

$$A = \frac{5'25^3 \times 32'1^{2'3}}{6'25^{1'9}}$$

Solución:

$$\log 5'25^3 = 3 \times \log 5'25 = 0'7210 \times 3 = 2'1630$$

$$\log 32'1^{2'3} = 2'3 \times \log 32'1 = 2'3 \times 1'5065 = 3'4648$$

$$\log \text{ numerador} = 2'1630 + 3'4648 = 5'6278$$

$$\log \text{ denominador} = \log 6'25^{1'9} = 1'9 \times \log 6'25 = 1'9 \times 0'7959 = 1'5122$$

$$\log A = 5'6278 - 1'5122 = 4'1156$$

$$A = \text{antilog } 4'1156 \approx 13050$$

3. Realizar las operaciones hallando el valor de A.

$$A = \frac{\sqrt[4]{23} \times \sqrt[3]{39}}{\sqrt[4]{87} \times \sqrt[5]{101}}$$

Solución:

$$\log \sqrt[4]{23} = \frac{\log 23}{4} = 0'6808$$

$$\log \sqrt[3]{39} = \frac{\log 39}{3} = 0'5637$$

$$\log \text{ del numerador} = 1'2445$$

$$\log \sqrt[4]{87} = \frac{\log 87}{4} = 0'2349$$

$$\log \sqrt[5]{101} = \frac{\log 101}{5} = 0'4009$$

$$\log \text{ del denominador} = 0'6358$$

$$\log A = 1'2445 - 0'6358 = 0'6087$$

$$A = \text{antilog } 0'6087 = 4'80$$

LOGARITMOS DECIMALES

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	27	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3463	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6999	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7283	7292	7300	7308	7316	1	2	3	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	3	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	3	3	4	5	5	6	7
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

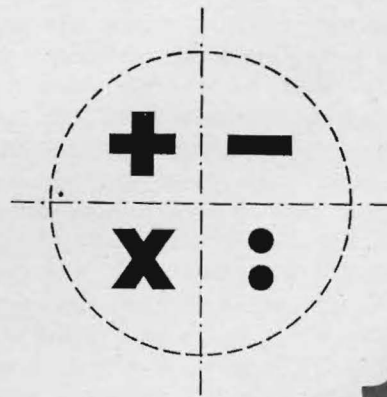
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	3	4	5	5	6	7	
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	3	4	5	5	6	7	
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	3	4	5	5	6	7	
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	3	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	3	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	3	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	3	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	3	3	4	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	3	3	4	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	3	3	4	4	5	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	3	3	4	4	5	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	3	3	4	4	5	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	3	3	4	4	5	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	3	3	4	4	5	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	3	3	4	4	5	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	3	3	4	4	5	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	3	3	4	4	5	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	3	3	4	4	5	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	3	3	4	4	5	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	4	9	13	17	22	26	30	35	39
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

MATEMATICAS

Vectores

Coordenadas

Representación gráfica
de ecuaciones



LECCION N^o 10

AFHA

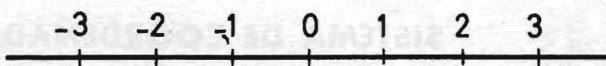
MATEMATICAS

Lección décima

Vectores - Operaciones con vectores - Coordenadas cartesianas - Representación gráfica de ecuaciones de primer grado - Representación gráfica de las principales ecuaciones de segundo grado.

CANTIDAD ESCALAR Y CANTIDAD VECTORIAL

Toda cantidad, todo número real, puede representarse sobre un segmento de recta. Así los números de la serie natural 1, 2, 3, 4, etc., corresponden gráficamente a:



Partiendo de un punto cualquiera al que hemos denominado 0, u origen, tomamos un trozo de recta 0-1, que nos sirve como unidad. Con esta unidad, y sobre el segmento rectilíneo, vamos marcando una sucesión de puntos a distancias iguales entre sí, de izquierda a derecha, que corresponden a los demás números. Observe como la circunstancia de que entre dos números consecutivos sólo hay una unidad de diferencia, se cumple en ambos sistemas. Si ahora con el trozo de recta 0-1 que tenemos como unidad vamos trazando nuevos puntos pero hacia la izquierda del cero u origen, obtendremos los números negativos -1 , -2 , -3 , etc. Todo número negativo es menor que cero, lo cual debe cumplirse también en la representación gráfica.

Efectivamente, sabemos que 4 es mayor que 3; que 3 es mayor que 2, etc. De ello deducimos que recorriendo la escala de derecha a izquierda vamos disminuyendo de valor. Al llegar al 1 y seguir hacia la izquierda, entramos en el campo de los decimales sin parte entera (0'9, 0'8, 0'7, etc.) que aún siguen siendo, no obstante, mayores que cero. Pero llega un momento en que nuestro recorrido coincide con el punto origen 0. A partir de ahora cualquier cantidad que queda a la izquierda deberá ser menor que cero para que se siga cumpliendo la regla. Por tanto, -1 es menor que cero, que es lo que pretendía demostrar. Observe cómo gráficamente se aprecia mucho mejor la circunstancia de que un número negativo es menor que otro cuya cifra significativa tenga un valor absoluto menor. Así -4 es menor que -3 y que -2 .

A las cantidades que se pueden representar de esta forma, se les denomina cantidades ESCALARES. En ellas sólo se tiene en cuenta la longitud del trozo de recta que las representa. Las operaciones con estas cantidades se limitan a las normales que hemos visto en lecciones anteriores.

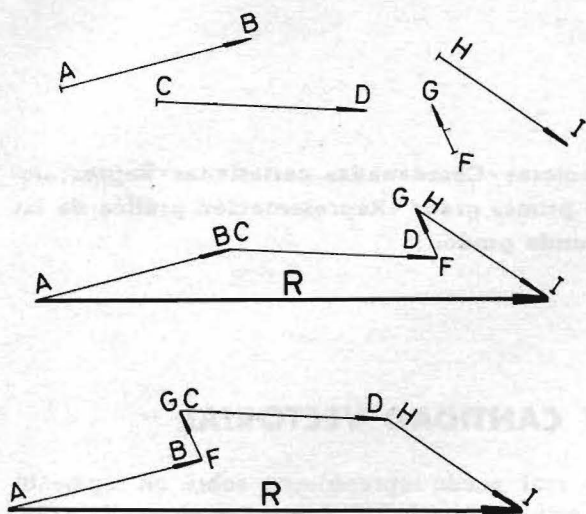
Pero, existen otras cantidades en las que no basta con conocer el valor de las mismas, sino que además debe tenerse muy presente la DIRECCIÓN. En este caso a la recta que determina la magnitud y dirección de la cantidad se denomina VECTOR y a la cantidad: CANTIDAD VECTORIAL.

SUMA DE VECTORES

Para sumar vectores gráficamente basta con dibujarlos procurando que el fin de un vector coincida con el principio del otro, y respetando la dirección de cada uno. El resultado nos viene dado en magnitud y dirección por un vector que une el principio y el fin de la recta quebrada formada por los vectores.

Vea en los ejemplos gráficos que el orden en que se toman los vectores no afecta al vector resultante, lo que equivale al principio o ley de la suma de que el orden de los sumandos no altera la suma.

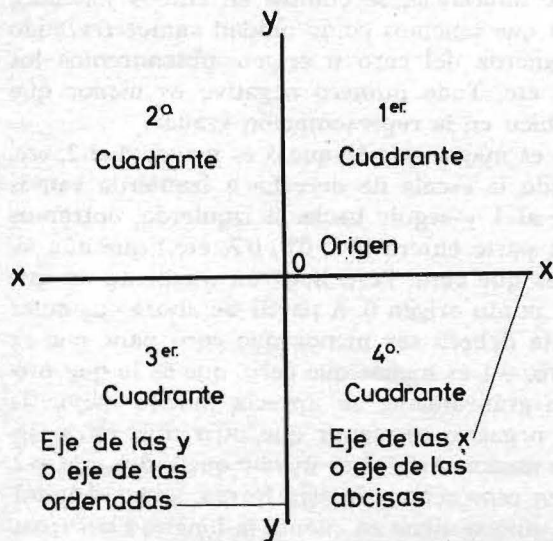
Salvo en la suma de vectores, en la que no es necesario ningún sistema de referencia, para todas las demás operaciones con los mismos es conveniente un sistema de referencia a fin de poderlos definir algebraicamente. De esta necesidad surgió el denominado *sistema de coordenadas*.



SISTEMA DE COORDENADAS

En este sistema se distinguen dos tipos distintos: el de COORDENADAS CARTESIANAS y el de COORDENADAS POLARES.

En el primero de ellos, el de coordenadas cartesianas, se ha dividido el plano en cuatro porciones iguales mediante dos rectas que se cruzan perpendicularmente. De ellas, la horizontal se denomina eje de las x, eje X-X, o eje de las ABCISAS, mientras la vertical recibe los nombres de eje de las y, eje Y-Y, o eje de las ORDENADAS.



Nota:
El signo || significa
"paralela a"

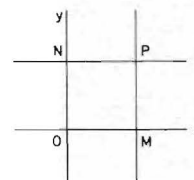
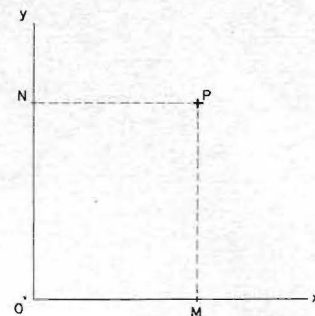
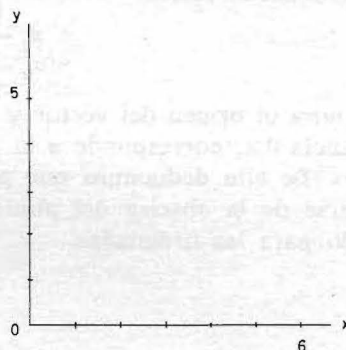
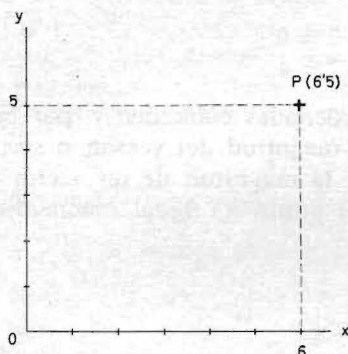
A su vez, el plano se divide en: primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante. Conocidos ya los elementos constitutivos del sistema, veamos cómo se utilizan.

Actuemos únicamente con el primer cuadrante, para lo cual prescindiremos por el momento de los demás. Si sobre la superficie abarcada por los dos ejes colocamos un punto en cualquier lugar, podremos conocer su situación con respecto al plano si logramos establecer alguna relación entre éste y el punto.

Las dos rectas OX y OY delimitan perfectamente al plano por dos de sus lados. Además, ambas se cruzan por un punto que les es común. Tomaremos, por tanto, a este punto como referencia.

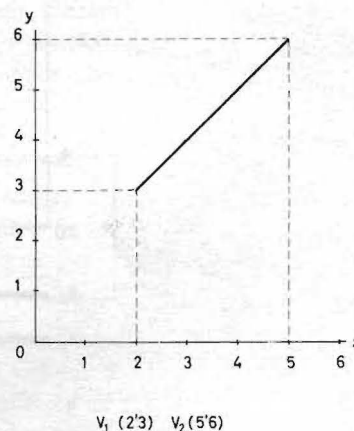
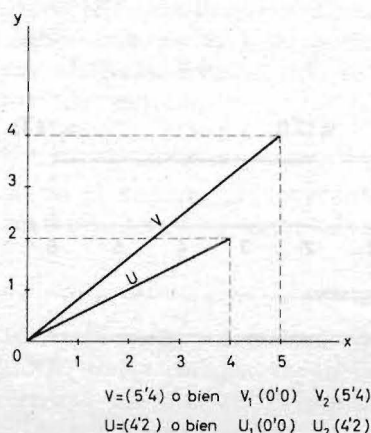
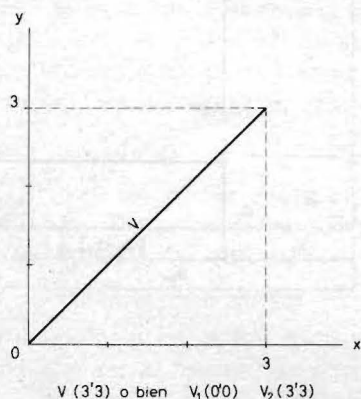
Si desde P trazamos una perpendicular a la línea OX y otra a la OY, habremos hallado dos nuevos puntos, uno sobre OX y otro sobre OY, para los que la distancia al origen es igual que la del punto P a los ejes. Así, $PM = ON$ y $PN = OM$. Recuerde que según la Geometría, la porción de recta cortada por dos paralelas al cruzarse con otras dos paralelas es constante. Y siendo $PM \parallel ON$ y $PN \parallel OM$, debe cumplirse la citada regla.

La distancia OM será la *abscisa del punto P*, y la ON la *ordenada*. De esta forma el punto queda determinado indicando (OM, ON). Con valores numéricos un punto que tenga las coordenadas (6'5) queda perfectamente definido, ya que trazando una perpendicular a la abscisa 6 y otra a la ordenada 5, ambas se cruzan por un punto que es el buscado. Observe que la primera cifra siempre indica la abscisa y la segunda la ordenada. De invertir estos términos, el punto hallado sería completamente distinto.



En el caso de ser un vector o línea la que debe determinarse, distinguiremos dos casos: cuando el origen del vector o línea coincide con el 0 y cuando no coincide.

En el primer caso, basta indicar el punto correspondiente al otro extremo del vector o línea.



En el segundo de los casos, para definir al vector necesitaremos indicar dos puntos, que serán los correspondientes al principio y al fin del vector o línea. Para el vector v sus coordenadas serán $v_1(2,3)$ $v_2(5,6)$.

Trazando los dos puntos así determinados, tenemos el vector, ya que por dos puntos sólo puede pasar una recta.

VALOR DE UN VECTOR. VECTOR PARALELO A UN EJE

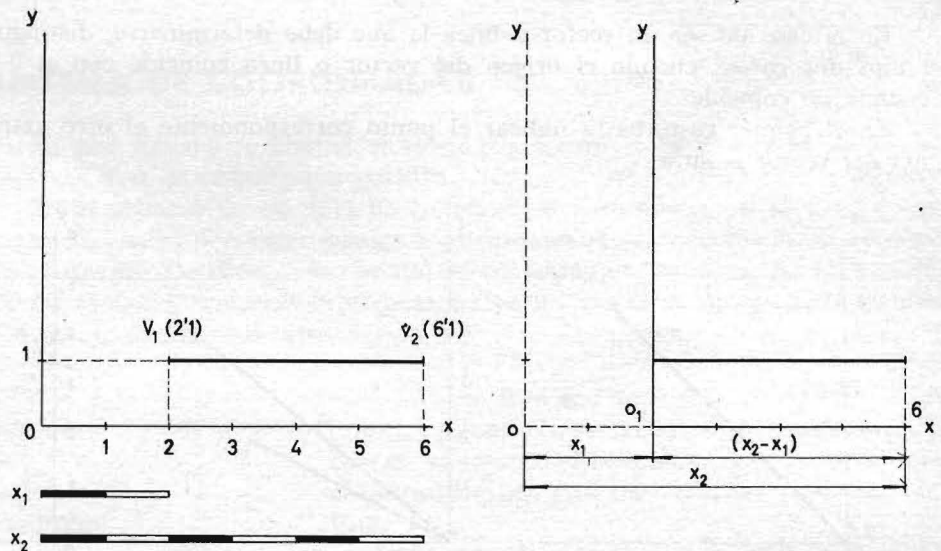
Ahora bien, hasta ahora sólo nos hemos referido a la forma de definir al vector o línea según la posición que tuviera sobre el plano. Pero como es natural, todo vector representa una cierta cantidad. Y la anotación $v_1(2,3)$ $v_2(5,6)$ no nos determina el valor de esta cantidad.

Las coordenadas del vector nos dan el valor de los puntos extremos del mismo, proyectados sobre las líneas de eje, al origen 0. Analicemos primeramente la proyección de una paralela al eje XX sobre este mismo eje. Sea $v_1 (2,1)$ $v_2 (6,1)$. La proyección de estos puntos sobre XX, corta el eje por x_1 y x_2 . El segmento x_1 vale 2 unidades, mientras el x_2 vale 6. Pero de los dos segmentos, el x_1 no corresponde al vector, sino que es la distancia que va del vector al origen de coordenadas. Hagamos coincidir a este origen con el del vector, restando el segmento x_1 de los dos puntos que nos determinan el vector.

$$x_1 - x_1 = 2 - 2 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$$

Ahora el origen del vector y el de coordenadas coinciden y, por tanto, la distancia $0, x_2$ corresponde a la verdadera magnitud del vector, o sea, 4 unidades. De ello deducimos que para hallar la magnitud de un vector deberá restarse de la abscisa del punto x_2 la del punto x_1 . Igual razonamiento es válido para las ordenadas.



VECTOR NO PARALELO A LOS EJES

Los dos casos anteriores se referían a vectores paralelos a los ejes. En el caso de formar ángulo con cualquiera de ellos o con los dos a la vez, la magnitud indicada por las coordenadas se referirá siempre a la proyección del vector sobre el eje. En este caso, para hallar el valor absoluto del vector, nos auxiliamos del teorema de Pitágoras, puesto que los ejes coordenados siempre forman ángulo recto. Recuerde que según el citado teorema, el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos).

Sea, por ejemplo, el vector R (el punto sobre la letra indica que es vector; también suele colocarse una pequeña flecha R) cuyas coordenadas son $r_1(3,2)$ $r_2(8,6)$. Sus proyecciones sobre los ejes nos dan los cuatro puntos:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 3 & x_2 = 8 \\ y_1 = 2 & y_2 = 6 \end{array}$$

Haciendo coincidir el origen de coordenadas con el punto r_1 , lo que equivale, según ya vimos, a $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$, obtenemos dos juegos de triángulos rectángulos, los $0_1 r_2 y_2$ y $0_1 r_2 x_2$. Tomemos, por ejemplo, el $0_1 r_2 x_2$. Siendo los lados

$$0_1 x_2 = (x_2 - x_1) \quad x_2 r_2 = (y_2 - y_1)$$

según Pitágoras, tendremos:

$$R^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(efectúe siempre primero las operaciones indicadas entre paréntesis).

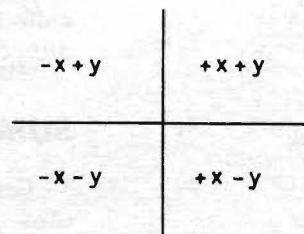
Al mismo resultado llegaría si hubiéramos tomado el otro triángulo.

Determinados posición y valor del vector, sólo nos resta conocer el sentido del mismo. Recuerde que un vector tiene dirección y sentido. La dirección viene dada por la situación sobre el plano, pero no es suficiente. Por ejemplo, una brújula siempre marca la dirección Norte-Sur. Pero si usted intenta dar a la aguja imantada un giro de 180° , con lo que la dirección Norte-Sur no varía, verá que al soltar la aguja ésta vuelve a su posición inicial. El *sentido* de la aguja es siempre hacia el Norte. Este sentido se marca mediante una flecha. Igual se efectúa con los vectores.

Puesto un vector sobre el plano en el sistema de coordenadas cartesianas, SE CONSIDERA DE SENTIDO POSITIVO SI VA DE IZQUIERDA A DERECHA Y DE ABAJO HACIA ARRIBA.

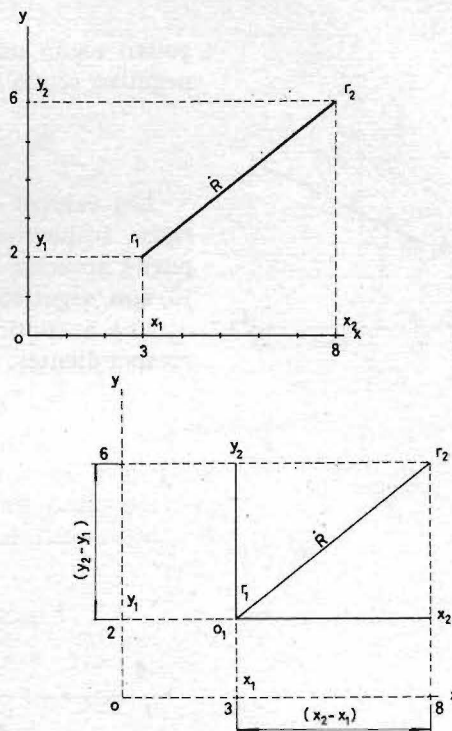
Volviendo, pues, a los cuatro cuadrantes en que dividimos al plano, veremos que en el eje de las abscisas XX , todas las que vayan del origen 0 hacia la derecha serán positivas, mientras las que se dirigen hacia la izquierda serán negativas. En cuanto a las ordenadas, de 0 hacia arriba serán positivas y de 0 hacia abajo negativas. O sea, que un punto situado en:

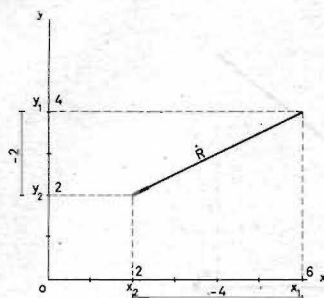
El primer cuadrante tiene:	+ x	+ y
El segundo cuadrante:	- x	+ y
El cuarto cuadrante:	+ x	- y
El tercer cuadrante:	- x	- y



Recuerde bien estos datos, que tienen la máxima importancia.

Un vector, de por sí, no tiene sentido positivo ni negativo, a no ser que se compare su sentido con el de otro que tenga su misma dirección. No obstante, las componentes (o proyecciones) del vector en el sistema cartesiano sí tienen sentido. Por tanto, podemos decir que un vector es positivo o ne-





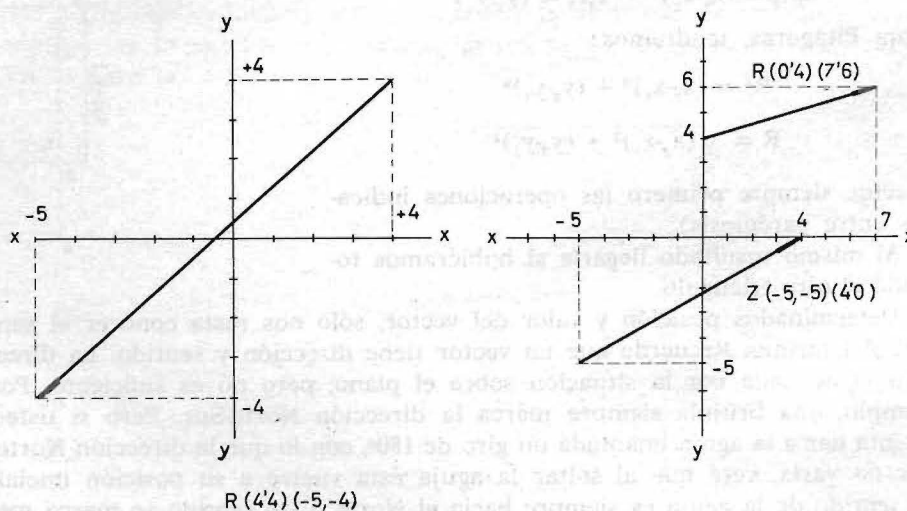
gativo según uno u otro de los ejes. Por ejemplo, el vector $R(6,4)(2,2)$ es negativo según los dos ejes, ya que sus componentes así nos lo indican:

$$x_2 - x_1 = 2 - 6 = -4$$

$$y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2$$

Los valores -4 y -2 se refieren al origen del vector y, por tanto, se dirigen, respectivamente, de x_1 hacia la izquierda y de y_1 hacia abajo, como puede apreciarse en la figura. Ambos sentidos, hacia la izquierda y hacia abajo, son negativos con respecto a sus respectivos ejes.

Vea a continuación algunos ejemplos de vectores y sus anotaciones correspondientes.

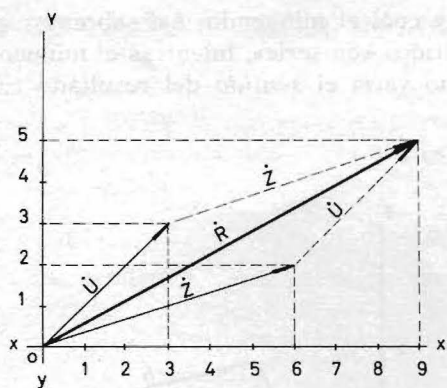


OPERACIONES CON VECTORES

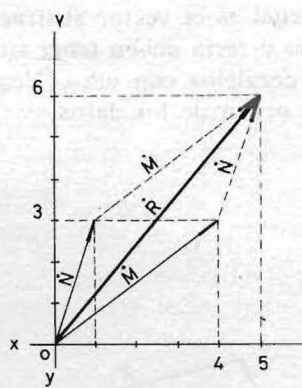
Un vector queda determinado en magnitud, dirección y sentido, por sus componentes (proyecciones) sobre cada uno de los dos ejes. Luego las operaciones con los vectores se basarán fundamentalmente en operaciones con dichas componentes. Como es natural, no podrán mezclarse entre sí los valores que correspondan al eje XX , abscisas, con los que corresponden al eje YY , llevarán una j delante de su valor numérico. Además se procurará que los vectores partan del origen de coordenadas, aunque no siempre será esto posible, sobre todo si el vector tiene ya una determinada posición sobre el plano. De ser así, todas las operaciones se harán siempre haciendo coincidir los vectores por uno u otro de sus extremos, conservando magnitud, dirección y sentido.

SUMA DE VECTORES

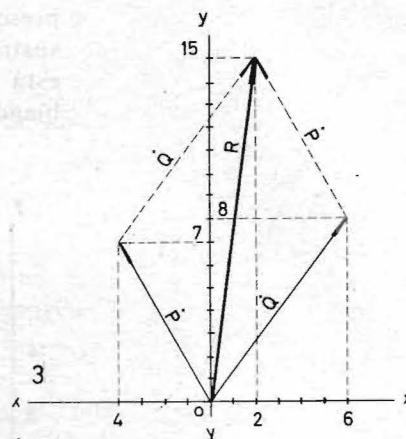
Gráficamente, se colocan los vectores a sumar uno a continuación de otro, haciendo coincidir el fin de uno con el principio del siguiente. El resultado, suma o resultante, es el vector que partiendo del origen de la línea quebrada va al extremo final de la misma, o sea, el vector que une los dos extremos. El sentido es el que partiendo del origen va hacia el fin de la línea quebrada. Observe que se «opone» al de los sumandos. Vea unos cuantos ejemplos:



1 $\vec{U} + \vec{Z} = \vec{R}$



2 $\vec{M} + \vec{N} = \vec{R}$



No me negará que gráficamente no presenta dificultad alguna, si se tiene cuidado en respetar siempre magnitud, dirección y sentido de todos los vectores que actúen como sumandos. Veamos un poco el cálculo numérico.

NÚMERO 1

Los dos vectores a sumar, U y Z, tienen como coordenadas:

$$U (0,0) (3,3)$$

$$Z (0,0) (6,2)$$

El valor de la componente x de U será:

$$x_2 - x_1 = 3 - 0 = 3$$

Y el de la y

$$y_2 - y_1 = 3 - 0 = 3$$

Por tanto,

$$U = 3 + j3$$

Por otro lado, Z tendrá los valores

$$x_2 - x_1 = 6 - 0 = 6$$

$$y_2 - y_1 = 2 - 0 = 2$$

$$Z = 6 + j2$$

Sumando por separado los valores correspondientes a cada eje:

$$R = U + Z = (3 + 6) + j(3 + 2) = 9 + j5$$

Resultado que se corresponde con el hallado gráficamente.

NÚMERO 2

$$M = 4 + j3 \quad N = 1 + j3$$

$$R = M + N = (4 + 1) + j(3 + 3) = 5 + j6$$

El signo + que precede a la j se refiere al carácter positivo de esta componente, no a que se haya de sumar a la otra componente.

NÚMERO 3

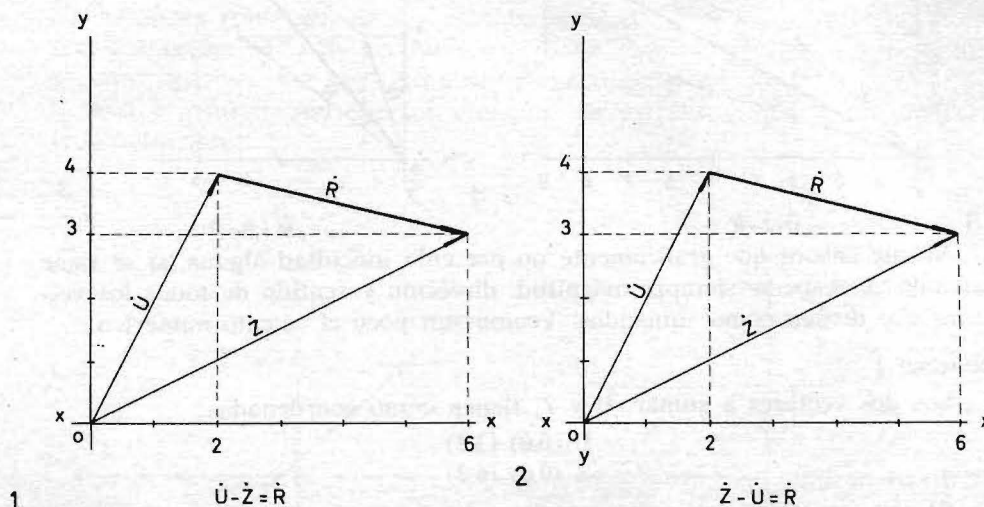
$$P = -4 + j7 \quad Q = 6 + j8$$

$$R = P + Q = (-4 + 6) + j(7 + 8) = 2 + j15$$

RESTA DE VECTORES

Para restar gráficamente dos vectores, se hacen coincidir sus extremos de origen. El resultado o resta vendrá dado por el vector que cierra el triángulo. ¿Y el sentido? Recuerde que en aritmética, la resta es la operación inversa a la suma, y que, por tanto, sustraendo y resta son los sumandos que sumados dan el minuendo. En el caso de los vectores, deberemos tener

presente cuál es el vector sustraendo y cuál el minuendo. Así sabremos que sustraendo y resta deben tener sus sentidos «en serie», mientras el minuendo está «en paralelo» con ellos. Vea cómo varía el *sentido* del resultado cambiando el orden de los datos.



En el caso primero, las componentes de U son $2 + j4$ y las de Z, $6 + j3$. Restando ordenadamente ambas componentes:

$$R = U - Z = (2 - 6) + j(4 - 3) = -4 + j1$$

La componente en el eje XX es de sentido negativo y en el YY positivo. Las coordenadas del nuevo vector serán las correspondientes a los puntos x_2 e y_2 y de los dos que se restan. Y como ha de estar en serie con el sustraendo, que en este caso es Z, colocaremos las de éste en primer lugar y las de U en segundo lugar, luego

$$R \ (6 + j3) \ (2 + j4) \text{ en la que } (x_2 - x_1) = -4 \\ (y_2 - y_1) = +j1$$

que cumple con lo hallado anteriormente.

En el segundo de los casos, las componentes siguen siendo las mismas, pero variando de lugar en la resta:

$$R = Z - U = (6 - 2) + j(3 - 4) = 4 + j(-1) = 4 - j1$$

El valor absoluto sigue siendo el mismo, pero el sentido ha cambiado. Ahora en el eje XX la componente es positiva, mientras en el YY es negativa. Las coordenadas serán ahora $R = (2 + j4) \ (6 + j3)$.

Ante lo expuesto, creo necesario hacer hincapié en lo importante que es darles el puesto que les corresponde a cada vector en la resta.

Antes de seguir con otros temas, no estará de más que recuerde que en la suma de vectores los sumandos se colocan uno a continuación de otro, haciendo coincidir el fin de uno con el origen del siguiente. La suma o resultado será un nuevo vector que cerrará la línea quebrada formada por los vectores sumandos. Estos pueden ser tantos como se quiera. En cambio, *en la resta, sólo se puede operar con dos vectores a la vez, y para ello se hacen coincidir sus orígenes. La resta o diferencia será un nuevo vector que cerrará el triángulo formado.*

El sentido de la resultante, en la suma, va del primer sumando al último; EN LA RESTA, VA DEL SUSTRAYENDO AL MINUENDO.

PENDIENTE DE UNA RECTA

Se conoce por pendiente de una recta, al cociente de las dos componentes de ésta. Así la pendiente de la recta AB de la figura, uno de cuyos puntos tiene como coordenadas (4,8) y otro (0,0) por pasar por el centro:

$$S = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{(4-0)}{(8-0)} = 0.5$$

La pendiente de la recta es, pues, 0.5. A igual resultado llegaríamos si tomáramos cualquier otro par de componentes. Haga usted mismo la prueba tomando dos puntos cualesquiera de dicha recta.

COORDENADAS POLARES

Simplemente, como noticia, sepa que en el sistema llamado de coordenadas polares los vectores vienen determinados por su magnitud y por el ángulo que forman con un eje arbitrario que se toma como referencia. El vector de la figura se indica de la forma:

$$Z = 7 \mid 30^\circ$$

REPRESENTACION GRAFICA DE ECUACIONES

Mediante el sistema de coordenadas cartesianas se pueden representar gráficamente cualquier tipo de ecuaciones algebraicas. Veremos a continuación las ecuaciones más corrientes: las de primer grado.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Al tratar de la pendiente de una recta, vimos que la inclinación adoptada sobre el plano con referencia a los ejes coordenados, venía determinada por la ecuación:

$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

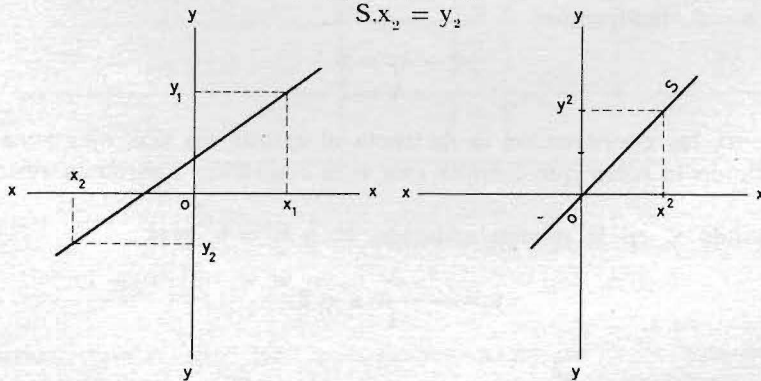
en la que x e y pueden ser las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la recta. Pues bien, desarrollando la ecuación anterior, obtenemos:

$$S(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

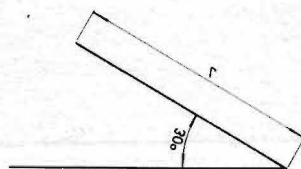
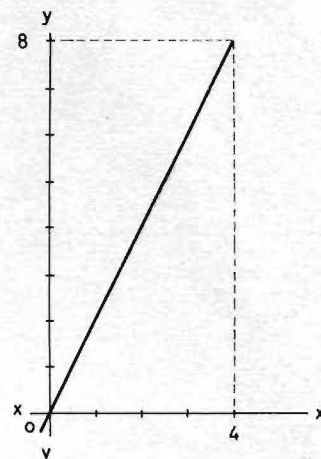
Y si ahora hacemos coincidir x_1 e y_1 con el origen 0,

$$S(x_2 - 0) = y_2 - 0$$

$$S \cdot x_2 = y_2$$



Ecuación que representa a la recta que partiendo del origen 0, tiene como coordenadas x_2 , y_2 y una pendiente S .



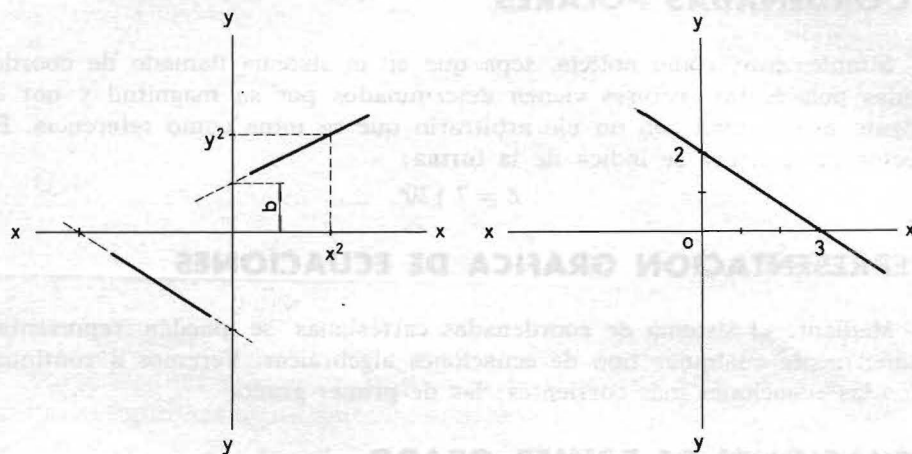
Si la recta no llegara a pasar por el origen, pero cortara a alguno de los dos ejes (lo que siempre puede conseguirse con sólo prolongarla en alguno de los dos sentidos, según el campo en el que estuviere), entonces x_1 o y_1 no se eliminarían, con lo que (suponiendo $x_1 = 0$, $y_1 = b$) la ecuación quedaría de esta forma:

$$S(x_2 - 0) = y_2 - y_1$$

$$S \cdot x_2 = y_2 - b$$

$$y_2 = Sx_2 + b$$

A la cantidad b se la denomina ordenada de la recta en el origen.



Esta última es la ecuación general de primer grado de una recta. Veamos, a continuación, algunos ejemplos de rectas con sus correspondientes ecuaciones. Sean, por ejemplo, las rectas: $2x + 3y = 6$, $x - 4y = 0$.

Resolviendo la primera ecuación para $y = 0$ (prolongación de la recta hasta cortar el eje de las YY) nos daría como valor para la x :

$$2x + 0 = 2x = 6 \quad (\text{puesto que } 3 \times 0 = 0)$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

y haciendo lo propio prolongando la recta hasta cortar el eje de las x , o sea, haciendo $x = 0$, tendremos:

$$0 + 3y = 6$$

$$y = 2$$

Por tanto, las coordenadas de la recta al cruzar los dos ejes serán $(3,0)$ $(0,2)$. Trazando la recta que cumpla con esta condición habremos resuelto el problema.

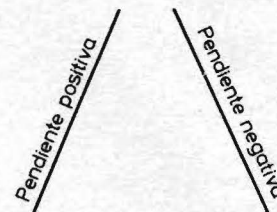
Despejando y , en la misma ecuación $2x + 3y = 6$, será:

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

En esta expresión, $-\frac{2}{3}$ es la pendiente de la recta, y $+2$ la ordenada en el origen.

UNA PENDIENTE NEGATIVA SIEMPRE CORRESPONDE A UNA RECTA CON EL PUNTO SUPERIOR A LA IZQUIERDA Y EL INFERIOR A LA DERECHA.

UNA PENDIENTE POSITIVA TIENE EL PUNTO SUPERIOR A LA DERECHA Y EL INFERIOR A LA IZQUIERDA DEL DIBUJO.



En la segunda ecuación propuesta ($x - 4y = 0$), al resolver cada punto haciendo coincidir el otro con su correspondiente eje, nos encontramos con la paradoja de que también es cero. Así, si $x = 0$

$$\begin{aligned} 0 - 4y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

y si es $y = 0$

$$\begin{aligned} x - 0 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, la recta pasa por el origen. Y resolviendo la ecuación para y

$$-4y = -x$$

multiplicando ambos términos por -1 , con lo que no alteramos su valor

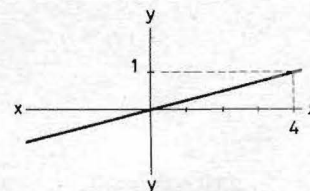
$$\begin{aligned} (-4y)(-1) &= (-x)(-1) \\ 4y &= x \end{aligned}$$

$$y = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}x$$

La pendiente, positiva, es $\frac{1}{4}$, y como la recta pasa por el origen no hay ordenada en el origen. Pero para poder trazar la recta, es preciso conocer otro punto. Para ello, bastará recordar que en el quebrado que indica la pendiente, el numerador nos da el punto y , y el denominador el punto x . Vea a continuación una tabla en la que según el signo de los términos de la ecuación, le da la pendiente y las coordenadas del punto necesario para trazar la recta:

ECUACION	PENDIENTE	COORDENADAS
$ax + by = 0$	$-\left(\frac{a}{b}\right)$	$(-b, a)$
$-ax - by = 0$	$-\left(\frac{a}{b}\right)$	$(-b, a)$
$ax - by = 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	(b, a)
$-ax + by = 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	(b, a)

Según la tabla, en la ecuación anterior $x - 4y = 0$ la pendiente es positiva (lo que concuerda con lo hallado), y las coordenadas del punto serán $(4, 1)$. Vea el resultado de la recta en el gráfico del margen.



Corresponde a este tipo de ecuación, la ley de Ohm, cuando se toman como variables V , I o V , R . En el primer caso se dan una serie de valores fijos a la resistencia, mientras en el segundo los valores fijos lo tomará la intensidad. Veamos como varía la intensidad en el primer caso.

Situemos el voltaje en el eje de las abscisas y la intensidad en el eje de ordenadas. Si suponemos que la resistencia tiene un valor de 50 ohmios calcularemos la intensidad que corresponde a dos o tres valores de tensión. Por ejemplo, con 20 voltios, la intensidad que circula por la resistencia será de

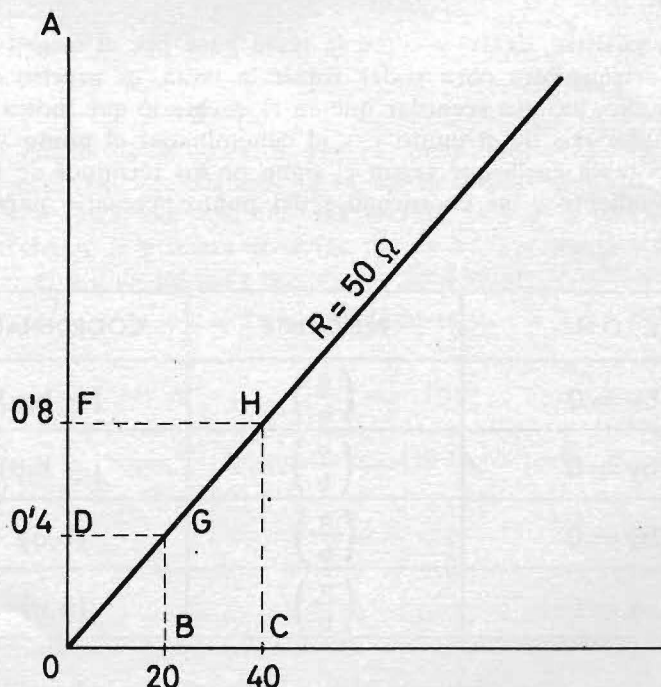
$$I = \frac{20}{50} = 0'4 \text{ A}$$

Con 40 voltios

$$I = \frac{40}{50} = 0'8 \text{ A}$$

Con estos dos valores tendremos suficiente para trazar la recta que corresponde a una resistencia de 50 ohmios. Como a 0 voltios, le corresponden 0 A, la recta empezará en el origen de coordenadas. Sobre el eje de abscisas, marcaremos el punto B, que corresponderá a 20 voltios. A continuación, y como 40 voltios es el doble, marcaremos el punto C a una distancia del B igual a 0 B. Trazados estos dos puntos, vamos con los de la intensidad. Sobre el eje de ordenadas, se indicarán los puntos D y F, de forma que las distancias OD y DF sean iguales, puesto que las escalas a que están dibujados los valores en un mismo eje es igual para todos ellos.

A continuación, y desde los puntos así hallados, trace perpendiculares a los mismos. Las perpendiculares a B y D, se cruzan en G, mientras C y F lo hacen en H. Estos dos puntos G y H pertenecen a la recta buscada.



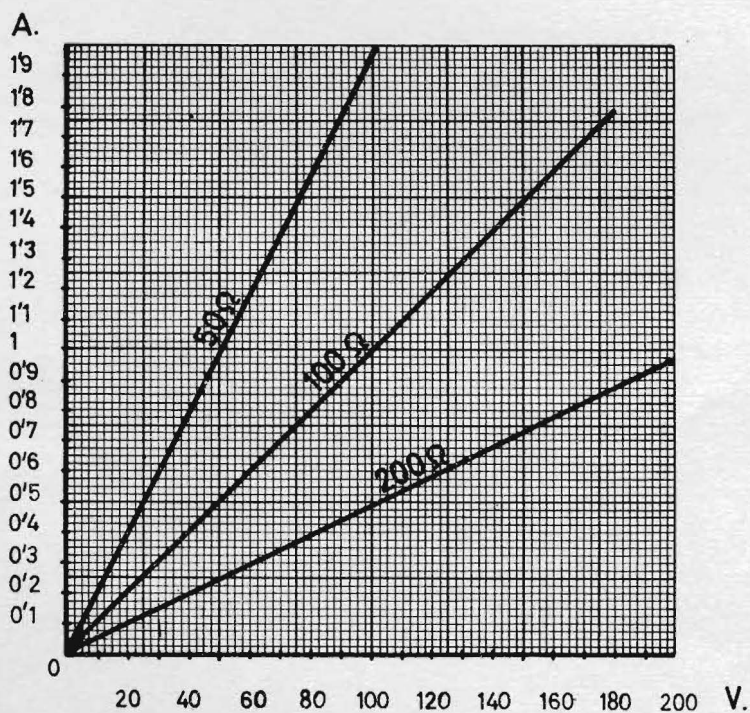
Respetando la escala que hemos tomado, trace diversos puntos en cada uno de los ejes y mediante perpendiculares, compruebe cómo aquellos puntos de ambos ejes cuyas perpendiculares se cruzan sobre la recta hallada, cumplen con las ecuaciones.

$$V = A \times 50$$

$$A = \frac{V}{50}$$

$$\frac{V}{A} = 50$$

De igual forma pueden irse trazando también varias rectas, con sólo tomar otros valores para la resistencia. Vea a continuación un ejemplo. En él se han dibujado las rectas correspondientes a valores de la resistencia de 50, 100, 200 ohmios. Le recomiendo tome otros valores para la resistencia, y se trace la gráfica correspondiente. No es necesario que trace todas las perpendiculares. Para evitarlo, es suficiente con que efectúe el dibujo sobre papel cuadriculado, para así aprovechar la misma cuadrícula del papel. Para trazados más perfectos, existe en el mercado un papel denominado «milimetrado». El siguiente ejemplo está trazado sobre este tipo de papel.



AFHA